



Обчислення перестановочної ентропії без перестановок

О.К.Відибіда
<http://vidybida.kiev.ua>

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

Боголюбівські читання 2021, Київ, Україна

Outline

Перестановки

Метод перестановочної ентропії

Застосування

Застосування до нейронної мережі

Метод арифметичної ентропії

Приклад

Дискусія і Висновки

Перестановки

Тут $D = 5$. Всього є $D!$ перестановок.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (1 \ 3 \ 0 \ 4 \ 2)$$

Обернена перестановка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2 \ 0 \ 4 \ 1 \ 3) = (1 \ 3 \ 0 \ 4 \ 2)^{-1}$$

Outline

Перестановки

Метод перестновочної ентропії

Застосування

Застосування до нейронної мережі

Метод арифметичної ентропії

Приклад

Дискусія і Висновки

Стаття з якої все почалось...

VOLUME 88, NUMBER 17

PHYSICAL REVIEW LETTERS

29 APRIL 2002

Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series

Christoph Bandt and Bernd Pompe

Institute of Mathematics and Institute of Physics, University of Greifswald, Greifswald, Germany

(Received 19 June 2001; revised manuscript received 20 December 2001; published 11 April 2002)

We introduce complexity parameters for time series based on comparison of neighboring values. The definition directly applies to arbitrary real-world data. For some well-known chaotic dynamical systems it is shown that our complexity behaves similar to Lyapunov exponents, and is particularly useful in the presence of dynamical or observational noise. The advantages of our method are its simplicity, extremely fast calculation, robustness, and invariance with respect to nonlinear monotonous transformations.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.174102

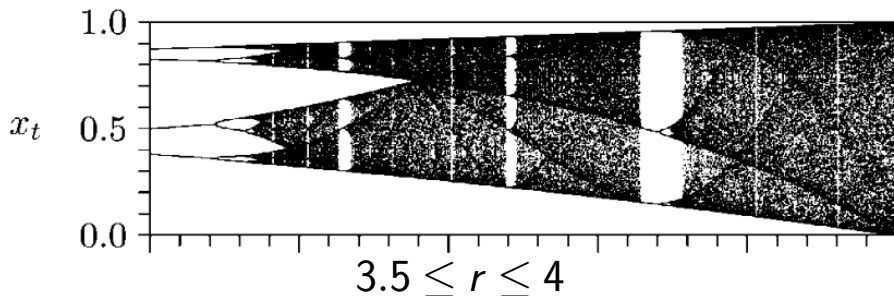
PACS numbers: 05.45.Tp, 02.50.-r



Логістичне відображення

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}), \quad x_i \in \mathbb{R}^1, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$



Вкладення розмірності D

для методу перестановочної ентропії: $N \gg D$!

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}), \quad x_i \in \mathbb{R}^1, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$V_0 = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{D-1}), \quad \dots,$$

$$V_i = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+D-1}), \quad \dots,$$

$$V_{N-D} = (x_{N-D}, x_{N+1-D}, \dots, x_{N-1}).$$

$$V = (V_0, V_1, \dots, V_{N-D}), \quad V_i \in \mathbb{R}^D, \quad i = 0, 1, \dots, N-D$$

Перестановочна ентропія

$$V = (x_0, \dots, x_{D-1}) \rightarrow V_\pi = (x_{r_0}, \dots, x_{r_{D-1}}), x_{r_0} < x_{r_1} < \dots < x_{r_{D-1}}$$

$$\pi \equiv \pi(V) = (r_0, r_1, \dots, r_{D-1}), \quad \text{приклад: } \pi((5_0, 7_1, 3_2)) = (2, 0, 1)$$

$$\text{приклад: } \pi((7, 14, 4)) = (2, 0, 1)$$

$\pi(V)$ називається “символ”, або “паттерн” вектора V

$$V = (V_0, V_1, \dots, V_{N-D}) \rightarrow \Pi = (\pi(V_0), \pi(V_1), \dots, \pi(V_{N-D}))$$

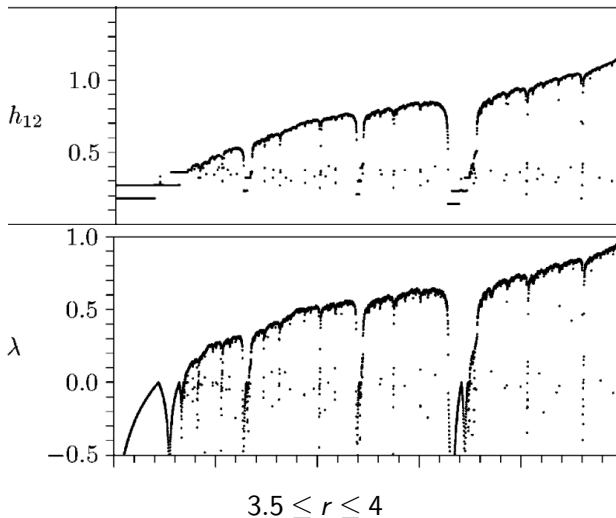
$n(\pi_i)$: кількість появ паттерну π_i в Π ;

ймовірність паттерну: $p(\pi_i) = n(\pi_i)/(N - D + 1)$

$$\text{ентропія: } H(V) \equiv H(\Pi) = - \sum_{i=1}^K p(\pi_i) \log(p(\pi_i))$$

Порівняння з показником Ляпунова

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Застосування в економіці (2015)

PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS A

rsta.royalsocietypublishing.org

Research



Cite this article: Bariviera AF, Guercio MB,
Martinez LB, Rosso OA. 2015 A permutation

Subject Areas:

statistical physics, mathematical finance,
chaos theory

A permutation information
theory tour through different
interest rate maturities: the
Libor case

Aurelio Fernández Bariviera¹, María Belén Guercio^{2,3},

Lisana B. Martinez^{2,3} and Osvaldo A. Rosso^{4,5}

“An anomalous behaviour in
the Libor is detected in all
currencies except euros during
the years 2006–2012.”

Застосування в медицині (2001)

1282

IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING, VOL. 48, NO. 11, NOVEMBER 2001

Entropy, Entropy Rate, and Pattern Classification as Tools to Typify Complexity in Short Heart Period Variability Series

Alberto Porta*, Stefano Guzzetti, Nicola Montano, Raffaello Furlan, Massimo Pagani, Alberto Malliani, and Sergio Cerutti, *Senior Member, IEEE*



Вони були перші...

Outline

Перестановки

Метод перестновочної ентропії

Застосування

Застосування до нейронної мережі

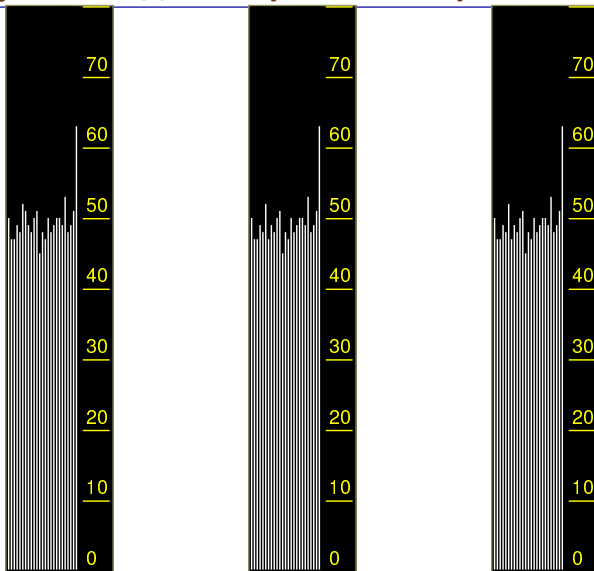
Метод арифметичної ентропії

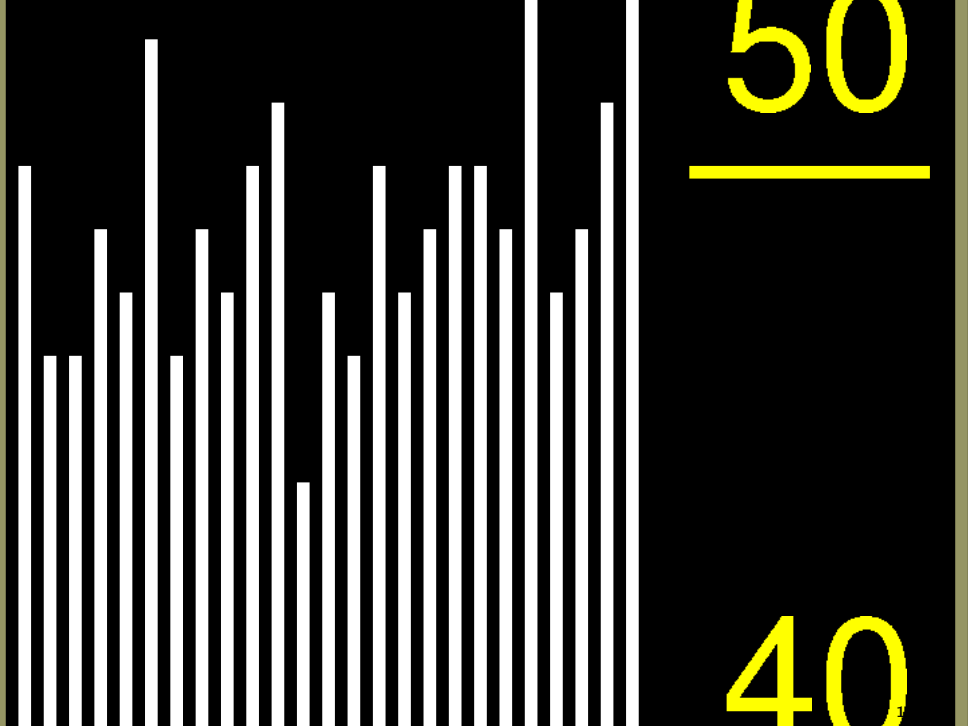
Приклад

Дискусія і Висновки

Застосування до нейронної мережі

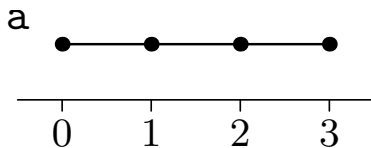
$D = 25$



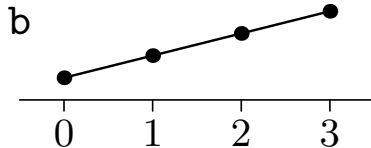


Трактовка рівних значень по ВР

якщо $x_s = x_r$ і $s < r$, то s пишеться першим



$$\pi = (0, 1, 2, 3)$$



$$\pi = (0, 1, 2, 3)$$

Це критикується:

Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



Permutation entropy based time series analysis: Equalities in the input signal can lead to false conclusions

Luciano Zunino^{a,b,*}, Felipe Olivares^c, Felix Scholkmann^{d,e}, Osvaldo A. Rosso^{f,g,h}

L. Zunino, F. Olivares, F. Scholkmann, and O. A. Rosso, "Permutation entropy based time series analysis: Equalities in the input signal can lead to false conclusions," *Physics Letters A*, vol. 381, no. 22, pp. 1883–1892, 2017.

Outline

Перестановки

Метод перестановочної ентропії

Застосування

Застосування до нейронної мережі

Метод арифметичної ентропії

Приклад

Дискусія і Висновки

Арифметична ентропія

COMPLEXITY

Research Article | Open Access

Volume 2020 | Article ID 7163254 | <https://doi.org/10.1155/2020/7163254>

[Show citation](#)

Calculating Permutation Entropy without Permutations

Alexander K. Vidybida   ¹

¹Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 14-b Metrolohichna Str, Kyiv 03143, Ukraine

Символізація без перестановок

$$V = (x_0, x_1, \dots, x_{D-1}) \rightarrow \alpha = \alpha(V) = (a_0, a_1, \dots, a_{D-1})$$

$\alpha(V)$ — арифметичний символ

приклад: $V = (7, 15, 7, 25, 15) \rightarrow \alpha(V) = (0, 1, 0, 2, 1)$.

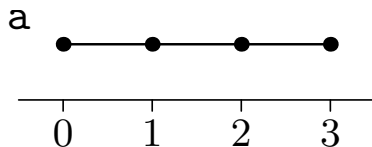
Теорема:

Якщо V має всі компоненти різні, то

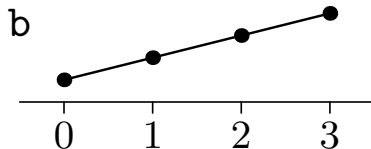
$$\alpha(V) = (\pi(V))^{-1},$$

де $\pi(V)$ — перестановка, яка отримується в методі перестановочної ентропії.

Трактовка рівних значень по ОК



$$\alpha = (0, 0, 0, 0)$$

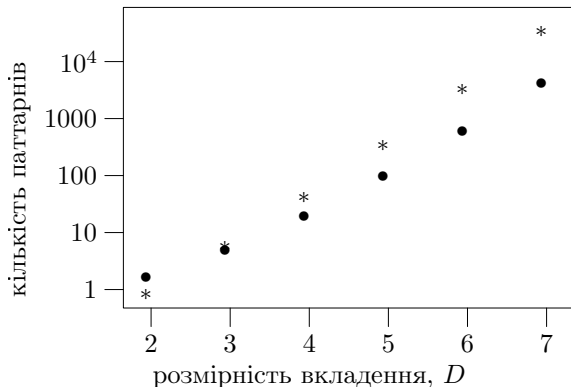


$$\alpha = (0, 1, 2, 3)$$

Скільки є нових символів?

$$N(D) = \sum_{0 < d < D} d! \left\{ \begin{matrix} D \\ d \end{matrix} \right\} = b(D) - D!,$$

де $\left\{ \begin{matrix} D \\ d \end{matrix} \right\}$ — числа Стірлінга другого роду, а $b(D)$ — впорядковане число Белла.



Перестановки індексують кодами Лехмера

Encoding permutations as integers via the Lehmer code (JavaScript)

[2013-03-13] dev, javascript, jslang



Dr. Axel Rauschmayer

(Ad, please don't block)



Born

Derrick Henry Lehmer
Lehmer
February 23, 1905
[Berkeley, California](#)

Died

May 22, 1991

Lehmer, D.H. (1960), "Teaching combinatorial tricks to a computer", Proc. Sympos. Appl. Math. Combinatorial Analysis, Amer. Math. Soc., 10: 179–193

K. Schwarz



<https://www.keithschwarz.com/interesting/code/>

- * File: FactoradicPermutation.hh
- * Author: Keith Schwarz (htiek@cs.stanford.edu)
- *
- * An algorithm for manipulating and generating permutations in lexicographic order by using the factoradic number system.
- *

Арифметизація

Числовий індекс/паттерн $A(V)$

$$V = (x_0, \dots, x_{D-1}) \rightarrow \alpha(V) = (a_0, \dots, a_{D-1}) \leftrightarrow A(V),$$

$$A(V) \equiv A = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_{D-1} D^{D-1}.$$

$$a_{D-1} = \left[\frac{A}{D^{D-1}} \right], \quad a_{D-2} = \left[\frac{A - a_{D-1} D^{D-1}}{D^{D-2}} \right], \quad \dots$$

квадратні дужки = “ціла частина”

Арифметична ентропія

$$V = (V_0, V_1, \dots, V_{N-D}) \rightarrow \mathcal{A} = (A(V_0), A(V_1), \dots, A(V_{N-D}))$$

ймовірність: $p(A_i) = n(A_i)/(N - D + 1)$

Арифметична ентропія:

$$H_a(V) \equiv H(\mathcal{A}) = - \sum_{i=1}^K p(A_i) \log(p(A_i))$$

Приклад

$$S1 = (2, 2, 0, 3, 4, 0, 1, 3, 4, 4, 0, 3, 3, 2, 2, 4, 4, 2, 0, 1, \dots),$$

$$S2 = (2, 3, 0, 3, 4, 0, 1, 3, 4, 0, 1, 3, 4, 2, 3, 4, 0, 2, 0, 1, \dots).$$

Було згенеровано дві послідовності довжини 1 000 000 і обчислено пермутаційну і арифметичну ентропії для кожної з них:

$D = 3$	PE	AE	$D = 4$	PE	AE
S1	2.497	3.684	S1	4.390	6.165
S2	2.368	2.919	S2	4.187	5.238

Outline

Перестановки

Метод перестновочної ентропії

Застосування

Застосування до нейронної мережі

Метод арифметичної ентропії

Приклад

Дискусія і Висновки

Порівняння методів символізації

Ch. Bian, Ch. Qin, Q. D. Y. Ma, and Q. Shen, “Modified permutation-entropy analysis of heartbeat dynamics,” **Physical Review E**, vol. 85, no. 2, Article ID 021906, 2012.

$$A(V_1) = A(V_2) \Rightarrow \mu(V_1) = \mu(V_2) \Rightarrow \pi(V_1) = \pi(V_2)$$

T. Haruna and K. Nakajima, “Permutation approach to finite-alphabet stationary stochastic processes based on the duality between values and orderings,” **The European Physical Journal Special Topics**, vol. 222, no. 2, pp. 383–399, 2013.

$$A(V_1) = A(V_2) \Leftrightarrow \sigma(V_1) = \sigma(V_2)$$

$$\sigma(V) = \{\pi(V), e(V)\}$$

Висновки

- Запропоновано новий метод символізації векторів вкладення, зручний для векторів з не всіма різними компонентами.
- Запропоновано новий метод обчислення перестановочної ентропії, який не потребує використання комбінаторики — арифметична ентропія.
- Для систем з векторами вкладення без рівних компонент ентропія, обчислена новим методом, збігається з стандартною перестановочною ентропією.
- Для систем з векторами вкладення, що мають рівні компоненти, запропонований метод дає більш детальний аналіз складності траєкторій.