

ВИХІДНИЙ ПОТІК ЗВ'ЯЗУЮЧОГО НЕЙРОНА*

For a binding neuron with threshold 2 stimulated by the Poissonian stream, we calculate the intensity of output stream and the probability density distribution for the lengths of output interpuls intervals. For threshold 3, we calculate the intensity of output stream.

Для связывающего нейрона с порогом 2, стимулированного пуассоновским потоком, вычислена интенсивность выходного потока и плотность распределения вероятности длин выходных межимпульсных интервалов. Для порога 3 вычислена интенсивность выходного потока.

0. Вступ. Концепцію зв'язуючого нейрона запропоновано в [1, 2] на основі чисельного моделювання відгуку нейрону типу Ходжкіна–Хакслі [3] на стимули, які складаються з великої кількості випадково розподілених у часі елементарних синаптичних стимулів. Зв'язуючий нейрон (ЗН) характеризується тривалістю внутрішньої пам'яті, $\tau \in]0; \infty[$, і порогом, $N_0 \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Кожен вхідний імпульс, потрапивши в нейрон, зберігається в ньому в незмінному вигляді протягом часу τ , після чого зникає. В момент коли число імпульсів, які зберігаються в нейроні, дорівнює N_0 , нейрон генерує вихідний імпульс і звільняється від усіх одержаних на цей момент імпульсів. Таким чином, ЗН перетворює вхідний потік імпульсів у вихідний за наведеним вище правилом. Наша мета — охарактеризувати вихідний потік виходячи з характеристик нейрона τ і N_0 і властивостей вхідного потоку. Властивості вихідного потоку є цікавими з точки зору відображення інформації в нейронних мережах [4, 5]. Якщо вхідний потік є пуассонівським з інтенсивністю λ , то зв'язуючий нейрон будемо називати пуассонівським (ПЗН). У даній роботі розглядається ПЗН з N_0 , що дорівнює 2 або 3. Специфіка математичного аналізу систем типу зв'язуючого нейрона виникає з нерозривного зв'язку в ЗН детерміністичної і випадкової динамік. А саме, нейрон одержує імпульси з випадкового потоку, а час зберігання одержаних імпульсів є фіксованим. У цьому вбачається істотна відмінність від теорії масового обслуговування [7, 8], де час обслуговування (аналог часу життя імпульсу в нейроні) є випадковим, розподіленим за відомим законом. Одночасна наявність у нейроні детерміністичної і випадкової динамік диктується тим фактом, що процес перебування імпульсу в реальних нейронах забезпечується електрохімічним перехідним процесом [3], який є детерміністичним, а вхідні імпульси одержуються від інших нейронів і від зовнішнього середовища нерегулярним (випадковим) чином.

1. Розподіл вихідних міжімпульсних інтервалів ПЗН при $N_0 = 2$. Розглянемо ПЗН, який стимулюється пуассонівським процесом з інтенсивністю λ , має пам'ять τ і поріг $N_0 = 2$. Отже, нейрон посилає вихідний імпульс завжди, коли вхідний імпульс приходить раніше, ніж через час τ після попереднього, а цей попередній імпульс очікувався довше, ніж τ , або імпульс, за яким він іде слідом, сам був причиною вихідного імпульсу. Статистику вихідних імпульсів можна описати в термінах щільності розподілу ймовірності довжин міжімпульсних інтервалів на

* Виконано за підтримки програми цільових досліджень Відділення фізики і астрономії НАН України.

виході ПЗН. Для цього досить знати ймовірність $P(t, \tau)dt$ того, що перший вихідний імпульс з'явиться через час t після включення (з точністю dt). Вказану подію можна розбити на певну кількість альтернатив, позначених номером k вхідного імпульсу, який спричинив появу вихідного. Зрозуміло, що $2 \leq k \leq k_{\max}$, де $k_{\max} = [t/\tau] + 2$, а $[x]$ позначає цілу частину x . Якщо позначити моменти появи імпульсів через t_1, t_2, \dots, t_{k-1} , то реалізація події з номером k для фіксованих моментів полягає в тому, що інтервали $[0; t_1[,]t_1; t_2[, \dots,]t_{k-1}; t[$ є вільними від імпульсів, а в інтервали довжиною $dt_1, \dots, dt_{k-1}, dt$ в околі моментів $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t$ прийшло по одному імпульсу. Згідно з означенням пуассонівського процесу [6], ймовірність такої реалізації задається виразом

$$e^{-\lambda t_1} \lambda dt_1 e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \lambda dt_2 \dots e^{-\lambda(t_{k-1} - t_{k-2})} \lambda dt_{k-1} e^{-\lambda(t - t_{k-1})} \lambda dt,$$

а ймовірність $P_k(t, \tau)dt$ цієї події при будь-яких допустимих значеннях t_1, t_2, \dots, t_{k-1} обчислюється інтегруванням цього виразу по множині $(k-1)$ -вимірному простору з координатами t_1, t_2, \dots, t_{k-1} , на якій виконуються умови

$$t_1 \geq 0, t_1 + \tau < t_2, \dots, t_i + \tau < t_{i+1}, \dots, t_{k-2} + \tau < t_{k-1} < t, \quad (1)$$

і $t - t_{k-1} < \tau$. Зауважимо, що

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \int_0^{t-(k-2)\tau} dt_1 \int_{t_1+\tau}^{t-(k-3)\tau} dt_2 \dots \int_{t_{k-2}+\tau}^t dt_{k-1} \lambda dt &= \\ &= e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \frac{(t - (k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо $k = k_{\max}$, то умова (1) гарантує, що $(k-1)$ -й імпульс потрапить в інтервал $]t - \tau; t[$ і поява k -го імпульсу в момент t викличе вихідний імпульс. Отже, в цьому випадку

$$P_k(t, \tau) dt = e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \frac{(t - (k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda dt, \quad k = k_{\max}.$$

Якщо ж $k < k_{\max}$, то інтеграл (2) містить також і конфігурації, в яких $t_{k-1} < t - \tau$. Для таких конфігурацій поява k -го вхідного імпульсу в момент t не викличе вихідного імпульсу. Внесок таких несприятливих конфігурацій в інтеграл (2) задається виразом

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \int_0^{t-(k-1)\tau} dt_1 \int_{t_1+\tau}^{t-(k-2)\tau} dt_2 \dots \int_{t_{k-2}+\tau}^{t-\tau} dt_{k-1} \lambda dt &= \\ &= e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \frac{(t - (k-1)\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda dt, \end{aligned}$$

який слід відняти від (2). Отже, при $2 \leq k < k_{\max}$

$$P_k(t, \tau) dt = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} ((t - (k-2)\tau)^{k-1} - (t - (k-1)\tau)^{k-1}) \lambda dt.$$

Повна ймовірність знаходиться як сума ймовірностей альтернатив. Зауважимо, що значення k_{\max} змінюється на 1, коли t переходить через ціле кратне τ . Отже, при $m = 0, 1, 2, \dots$ можна стверджувати: якщо $m\tau \leq t \leq (m + 1)\tau$, то

$$P(t, \tau)dt = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!} (t - m\tau)^{m+1} \lambda dt + \\ + \sum_{2 \leq k \leq m+1} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} ((t - (k-2)\tau)^{k-1} - (t - (k-1)\tau)^{k-1}) \lambda dt. \quad (3)$$

Знайдена функція $P(t, \tau) dt$ є аналогом функції $e^{-\lambda t} \lambda dt$ для міжімпульсних інтервалів пуассонівського процесу. Можна довести, що функція $P(t, \tau)$ має максимум при $t = \min(\tau, 1/\lambda)$. На нескінченності функція $P(t, \tau)$ спадає експонентним чином. А саме, для кожного значення параметрів (λ, τ) існують додатні числа A, α, B, β такі, що при достатньо великих t виконується нерівність

$$Be^{-\beta t} < P(t, \tau) < Ae^{-\alpha t}.$$

Інтегруванням виразу (3) по інтервалу $[0; \infty[$ можна також пересвідчитись, що щільність імовірності (3) нормована на 1.

2. Середня інтенсивність вихідного потоку для $N_0 = 2$. Для означення середньої інтенсивності вихідного потоку розглянемо ситуацію, коли функціонування ПЗН починається при $t = 0$, причому в цей момент нейрон не містить імпульсів. Подальша еволюція ПЗН і його вихідного потоку цілком визначаються потоком вхідних імпульсів, який генерується пуассонівським процесом. Якщо позначити через $n_p(t), t \geq 0$, деяку реалізацію пуассонівського процесу, то їй відповідає єдина траєкторія $n_b(t)$ вихідного потоку, яку легко побудувати виходячи з означення ЗН. На множині всіх траєкторій $n_p(t)$, згідно з означенням процесу Пуассона, задано борелівську міру, яка визначає ймовірності подій щодо вхідного потоку. Відповідність $n_p(t) \rightarrow n_b(t)$ стандартним чином [9] індукує міру на множині всіх вихідних траєкторій $n_b(t)$, яка дозволяє визначати ймовірності подій щодо вихідного потоку нейрона.

Зауважимо, що в процесі функціонування під дією вхідного потоку ЗН з порогом 2 може перебувати в станах C_0 або C_1 , коли він відповідно не зберігає або зберігає один імпульс. Кожній вхідній траєкторії $n_p(t)$ відповідає єдина траєкторія $c(t)$ станів нейрона, яка визначена для $t \geq 0$, є кусково-сталою і набуває значень у множині $\{C_0, C_1\}$. На множині всіх траєкторій $c(t)$ так само, як і для $n_b(t)$, індукується міра, яка дозволяє визначати ймовірності подій щодо стану ПЗН.

Інтенсивність вихідного потоку ПЗН в момент t означимо формулою (див. [7])

$$\lambda_0(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{w(s, t)}{s}, \quad (4)$$

де $w(s, t)$ – ймовірність одержання вихідного імпульсу в проміжку $[t; t + s[$. Під середньою вихідною інтенсивністю будемо розуміти границю

$$\lambda_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_0(t). \quad (5)$$

Зауважимо, що вихідний імпульс генерується, якщо одночасно спостерігаються дві події: i) нейрон перебуває в стані C_1 ; ii) від вхідного потоку одержується імпульс. Ці дві події є незалежними, оскільки поява імпульсу події ii) не залежить від розташування попередніх вхідних імпульсів, а стан нейрона визначається саме попередніми імпульсами. Позначимо через $\alpha(t)$ ймовірність перебування нейрона у стані C_1 в момент t . Ймовірність одержати вхідний імпульс у проміжку $[t; t + s[$ задається виразом $\lambda s + o(s)$, звідки $w(s, t) = \alpha(t)(\lambda s + o(s))$. Останнє дозволяє записати замість (4)

$$\lambda_0(t) = \alpha(t)\lambda \quad (6)$$

і замість (5)

$$\lambda_0(t) = \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t). \quad (7)$$

Зауваження 1. Якщо границя в (5) існує, то $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s \lambda_0(t) dt = \lambda_0$, що виправдовує використання назви „середня інтенсивність” для λ_0 .

Для подальшого перетворення (7) зауважимо, що потік $c(t)$ є відновлюючим у тому сенсі, що послідовні моменти початку стану C_0 є динамічно і статистично тотожними. Будемо називати відрізок траєкторії $c(t)$ елементарним відрізком, якщо він обмежений двома послідовними початками стану C_0 . Кожній траєкторії $c(t)$ поставимо у відповідність тривалість $T(c(\cdot))$ її першого елементарного відрізка, а також тривалості $T_0(c(\cdot))$, $T_1(c(\cdot))$ перебування у станах C_0 , C_1 відповідно, під час проходження системою першого елементарного відрізка. Математичне сподівання T_0 позначимо через \overline{T}_0 . \overline{T}_0 – це середній міжімпульсний інтервал вхідного пуассонівського потоку:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{\lambda}. \quad (8)$$

Математичне сподівання \overline{T}_1 для ПЗН з порогом 2 можна знайти, використовуючи відповідну функцію розподілу:

$$P(T_1 < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \leq \tau, \\ 1, & x > \tau, \end{cases}$$

$$\overline{T}_1 \equiv \mathbf{E}(T_1) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\tau}). \quad (9)$$

Звідси знаходимо $\overline{T} \equiv \mathbf{E}(T) = \overline{T}_0 + \overline{T}_1 < \infty$. Із викладеного випливає, що процес $c(t)$ задовольняє умову теореми про границі у випадкових процесах (див. [10], гл. XI, § 8) і прикладу б) до цієї теореми. Висновком із теореми і прикладу є існування і значення границі в (7):

$$\alpha \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \frac{\overline{T}_1}{\overline{T}_0 + \overline{T}_1}. \quad (10)$$

Використавши (7)–(10), одержимо

$$\lambda_0 = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{2 - e^{-\lambda\tau}}\lambda. \quad (11)$$

Середню вихідну інтенсивність ПЗН можна також визначити через середнє значення \bar{W} міжімпульсного інтервалу W у вихідному потоці як

$$\mu_0 = \frac{1}{\bar{W}}.$$

\bar{W} обчислюється на основі явного виразу (3) для щільності розподілу ймовірності тривалості інтервалів:

$$\bar{W} \equiv \mathbf{E}(W) = \int_0^{\infty} t P(t, \tau) dt = \frac{1}{\lambda} \left(2 + \frac{1}{e^{\lambda\tau} - 1} \right).$$

Останнє узгоджується з (11), тобто $\mu_0 = \lambda_0^1$.

3. Середня інтенсивність потоку вихідних імпульсів ПЗН з порогом 3.

У цьому пункті для $N_0 = 3$ обчислимо середню інтенсивність вихідного потоку, як це зроблено в попередньому пункті для $N_0 = 2$. Отже, ми дотримуємось означення середньої вихідної інтенсивності, описаного формулами (4)–(7). Слід зауважити, що ПЗН з порогом 3 має три можливих стани і відповідний допоміжний процес зміни станів нейрона, $c(t)$, набуває значень у множині $\{C_0, C_1, C_2\}$. Відповідно, $\alpha(t)$ в формулі (6) — це ймовірність перебування нейрона в стані C_2 в момент t . Аналогом формули (10) для $N_0 = 3$ є формула

$$\alpha = \frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_0 + \bar{T}_1 + \bar{T}_2}, \quad (12)$$

де \bar{T}_0 задається формулою (8), а означення випадкових величин T_1 і T_2 слід дати окремо. Річ у тім, що проходження елементарного відрізка для $N_0 = 3$ може відбутись за сценарієм багатократної зміни станів типу $C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_0$ (з вихідним імпульсом) або $C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0$ (без вихідного імпульсу). Для певної траєкторії $c(t)$ $T_1(c(\cdot))$ і $T_2(c(\cdot))$ дають сумарний час перебування $c(t)$ у стані C_1 і C_2 відповідно при проходженні першого елементарного відрізка. Математичні сподівання \bar{T}_1 і \bar{T}_2 слід обчислити за допомогою міри, яка індукується на множині всіх траєкторій $c(t)$ мірою на траєкторіях вхідного потоку $n_p(t)$ і однозначним відображенням $n_p(t) \rightarrow c(t)$, визначеним принципом дії ПЗН з порогом 3.

Оскільки для $N_0 = 3$ перебування нейрона в стані C_1 або C_2 під час проходження одного елементарного відрізка траєкторії може складатись з багатьох непоєднаних відрізків часу, що не відбувається для $N_0 = 2$ і не припускається в наведеному вище прикладі, то для строгого обґрунтування (12) слід навести додаткові міркування. Ці міркування надає наступна пропозиція.

Пропозиція 1. Нехай для деякого стохастичного процесу $c(t)$ виконується умова згаданої вище теореми, тобто: *i)* процес $c(t)$ є процесом відновлення; *ii)* ма-

¹ Інтенсивність, означену через середній міжімпульсний інтервал, можна назвати інтегральною інтенсивністю, а означену в (5) — середньою диференціальною. Факт рівності миттєвої диференціальної та інтегральної інтенсивностей для стаціонарних ординарних випадкових процесів складає зміст теореми В. С. Королюка [7] (§ 11). Отже, рівність $\mu_0 = \lambda_0$ для вихідного потоку ПЗН з порогом 2 для великих часів, коли він стає стаціонарним, можна було б очікувати з огляду на теорему Королюка.

тематичне сподівання тривалості елементарного відрізка є обмеженим. Тоді границя при $t \rightarrow \infty$ ймовірності $P_k(t)$ перебування системи в момент часу t в стані C_k обчислюється за формулою

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \frac{\overline{T}_k}{\overline{T}}, \quad (13)$$

де \overline{T}_k — математичне сподівання сумарної тривалості перебування системи в стані C_k під час проходження елементарного відрізка еволюції, а \overline{T} — середня за ймовірністю тривалість елементарного відрізка: $\overline{T}_k \equiv \mathbf{E}(T_k)$, $\overline{T} \equiv \mathbf{E}(T)$.

Доведення². Розглянемо вираз для обчислення границі ймовірності, який фігурує у висновку теореми про границі випадкових процесів (див. [10], гл. XI, § 8)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \frac{1}{\overline{T}} \int_0^{\infty} q_k(t) dt, \quad (14)$$

де $q_k(t)$ — ймовірність події $[c(t) = C_k] \wedge [T > t]$:

$$q_k(t) = P([c(t) = C_k] \wedge [T > t]).$$

Тут $T \equiv T(c(\cdot))$ позначає тривалість першого елементарного відрізка траєкторії $c(t)$. Для кожної пари (k, t) , де $k \in \{0, 1, 2\}$, $t \in [0; \infty[$, задамо на множині траєкторій $c(s)$ функцію $f_{k,t}(c(\cdot))$ за формулою

$$f_{k,t}(c(\cdot)) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } [c(t) = C_k] \wedge [T(c(\cdot)) > t], \\ 0 & \text{— в інших випадках.} \end{cases}$$

Очевидно,

$$P([c(t) = C_k] \wedge [T > t]) = \mathbf{E}(f_{k,t}(c(\cdot))).$$

Підставимо останнє в інтеграл, який фігурує в (14):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} q_k(t) dt &= \int_0^{\infty} \mathbf{E}(f_{k,t}(c(\cdot))) dt = \mathbf{E} \int_0^{\infty} f_{k,t}(c(\cdot)) dt = \\ &= \mathbf{E} \int_0^{T(c(\cdot))} f_{k,t}(c(\cdot)) dt = \mathbf{E}(T_k(c(\cdot))) = \overline{T}_k. \end{aligned}$$

Пропозицію доведено.

Для ПЗН з порогом $3 \overline{T}$ обчислене (див. (19)) і є скінченним. Таким чином, з формули (13) випливає формула (12).

Нижче потрібні в (12) величини обчислюються таким чином. Розглядаються всі можливі сценарії зміни стану нейрона між послідовними перебуваннями у стані C_0 . Сценарій, в якому нейрон побував n разів у стані C_2 і перейшов у стан C_0

² Цей варіант доведення автору підказав О. М. Кулик.

безпосередньо з стану C_2 , тобто з вихідним імпульсом, позначимо $(n, 1)$. Сценарій, в якому нейрон побував n разів у стані C_2 і перейшов у стан C_0 зі стану C_1 , тобто без вихідного імпульсу, позначимо $(n, 0)$. Сценарій $(n, 0)$, наприклад, реалізується, якщо після попадання n -й раз у стан C_2 нейрон очікує вхідного імпульсу довше, ніж τ . Для обчислення $\overline{T_k}$ обчислюються умовні математичні сподівання величин T_k за умови реалізації одного з альтернативних сценаріїв і внески всіх сценаріїв додаються. Відповідні щільності умовних функцій розподілу величин T_k фігурують у відповідних підінтегральних виразах (наприклад, в (16)).

3.1. Ймовірності окремих сценаріїв. Позначимо через $p_{(n,0)}$, $p_{(n,1)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ймовірності реалізації відповідних сценаріїв. Будь-який сценарій реалізується, якщо серія вхідних імпульсів розташована в часі відповідним чином. Будемо нумерувати вхідні імпульси так, що імпульс, який викликає перший перехід із стану C_0 у стан C_1 , одержує номер 0, а наступні імпульси — 1, 2, 3, ... Міжімпульсні інтервали занумеруємо так, що x_1 позначає відрізок часу, який проходить між нульовим і першим імпульсами. Найкоротший сценарій, $(0, 0)$, реалізується, якщо після переходу нейрона $C_0 \rightarrow C_1$ наступний імпульс очікується довше, ніж τ . Отже, нейрон повертається у стан C_0 без заходів у C_2 і без вихідного імпульсу. Ймовірність такого сценарію — це ймовірність події $(x_1 > \tau)$. Отже, $p_{(0,0)} = e^{-\lambda\tau}$. Сценарій $(0, 1)$ неможливий, оскільки неможливо одержати вихідний імпульс без заходу у стан C_2 . Отже, $p_{(0,1)} = 0$. Для обчислення ймовірностей сценаріїв $(n, 0)$, $(n, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, зауважимо, що для реалізації сценарію з n заходами у стан C_2 необхідно рівно n вхідних імпульсів³. Для завершення з вихідним імпульсом потрібен ще один вхідний імпульс. Для заходів у $C_{1,2}$ і остаточного переходу з $C_{1,2}$ в C_0 імпульси не потрібні⁴. Для підтримання неперервного процесу переходів у C_2 , $C_{1,2}$, C_2 , $C_{1,2}, \dots$, необхідно, щоб кожен міжімпульсний інтервал x_i був коротшим за τ , але довшим, ніж $\tau - x_{i-1}$. Умова $x_i < \tau$ гарантує, що наступний імпульс прийде в нейрон раніше, ніж зникне попередній. Умова $x_i > \tau - x_{i-1}$ гарантує, що наступний імпульс прийде в нейрон після того, як зникне попередник його попередника, отже, в нейроні буде в цей момент рівно один імпульс. Перший інтервал, x_1 , може бути як завгодно коротким, оскільки в стані $C_{1,0}$ є тільки один імпульс з моменту його (стану) виникнення. Для завершення з вихідним імпульсом останній інтервал $((n+1)$ -й) має бути коротшим за $\tau - x_n$, і тоді в момент приходу $(n+1)$ -го імпульсу в нейроні буде 2 імпульси, що приведе до переходу в C_0 з вихідним імпульсом. Для завершення без вихідного імпульсу останній інтервал $((n+1)$ -й) має бути довшим за τ , тоді в момент приходу $(n+1)$ -го імпульсу в нейроні не буде імпульсів. Отже, він перейшов у стан C_0 через τ після приходу n -го. Після приходу n -го імпульсу нейрон перейде у стан C_2 , через $\tau - x_n$ — у стан C_1 і ще через x_n — у стан C_0 . На підставі викладеного можемо записати наступні вирази для ймовірностей:

$$p_{(n,0)} = \int_0^{\tau} e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots$$

³ Імпульс, який спричинює перший перехід $C_0 \rightarrow C_1$, не враховується.

⁴ $C_{1,2}$ і $C_{1,0}$ позначають стан з одним імпульсом, якому передували стани C_2 і C_0 відповідно.

$$\begin{aligned}
& \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n \int_{\tau}^{\infty} e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} = \\
& = e^{-\lambda \tau} \int_0^{\tau} e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n, \\
& p_{(n,1)} = \int_0^{\tau} e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \\
& \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n \int_0^{\tau-x_n} e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{15}$$

Можна пересвідчитись, що сума записаних вище ймовірностей для всіх альтернатив дорівнює 1, а саме:

$$e^{-\lambda \tau} + \sum_{n \geq 1} (p_{(n,0)} + p_{(n,1)}) = 1.$$

3.2. Внески окремих сценаріїв. У даному підпункті ми запишемо формули для обчислення внеску окремого сценарію в середній час перебування нейрона в кожному зі станів C_0, C_1, C_2 . Для сценарію $(n, 1)$ кожен із інтервалів $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ дає час перебування в стані C_2 , що дорівнює $\tau - x_i$. Інтервал x_n і наступний (породжуючий вихідний імпульс) разом дають час перебування в C_2 , що дорівнює x_{n+1} . Отже, при фіксованому наборі інтервалів, який забезпечує сценарій $(n, 1)$, час перебування в C_2 задається виразом $(n-1)\tau - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} + x_{n+1}$, точніше

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) + x_{n+1}.$$

Для сценарію $(n, 0)$ цей час буде

$$\sum_{i=1}^n (\tau - x_i).$$

Повний час від моменту переходу $C_0 \rightarrow C_1$ до моменту переходу $C_2 \rightarrow C_0$ у сценарії $(n, 1)$ дорівнює $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$. Отже, час, перебування у стані C_1 дорівнює $2(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n - (n-1)\tau$, або

$$\sum_{i=1}^{n-1} (2x_i - \tau) + x_n.$$

Повний час від переходу $C_0 \rightarrow C_1$ до моменту переходу $C_1 \rightarrow C_0$ у сценарії $(n, 0)$ дорівнює $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \tau$. Отже, час, перебування у C_1 дорівнює $2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (n-1)\tau$, або

$$\sum_{i=1}^n (2x_i - \tau) + \tau.$$

Останні чотири вирази справедливі і для $n = 1$, якщо вважати суму рівною нулю, коли її нижня межа підсумовування перевищує верхню на 1.

Записані вище формули дають час перебування у відповідних станах, якщо набір міжімпульсних інтервалів зафіксовано. Для того щоб визначити, яким є внесок певного набору міжімпульсних інтервалів у середній час перебування у відповідному стані, слід ці формули домножити на ймовірності відповідних наборів інтервалів. Для того щоб одержати внесок певного сценарію, слід після домноження зінтегрувати одержаний вираз по множині наборів інтервалів, які забезпечують еволюцію за цим сценарієм. Викладене дозволяє записати наступні вирази для внесків окремих сценаріїв:

$$\begin{aligned} \overline{T_{2,(n,1)}} &= \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \\ &\dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) + x_{n+1} \right), \\ \overline{T_{1,(n,1)}} &= \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \\ &\dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (2x_i - \tau) + x_n \right), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \overline{T_{2,(n,0)}} &= \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \\ &\dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_\tau^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right), \\ \overline{T_{1,(n,0)}} &= \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \\ &\dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_\tau^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (2x_i - \tau) + \tau \right), \end{aligned}$$

де $n = 1, 2, \dots$, а $\overline{T_{2,(n,1)}}$, $\overline{T_{1,(n,1)}}$, $\overline{T_{2,(n,0)}}$, $\overline{T_{1,(n,0)}}$ позначають внески сценаріїв $(n, 1)$ і $(n, 0)$ в час перебування у станах C_2 і C_1 відповідно. Крім того, оскільки сценарій $(0,1)$ не є можливим, а в сценарії $(0,0)$ заходів у стані C_2 немає, то

$\overline{T_{2,(0,1)}} = 0$, $\overline{T_{1,(0,1)}} = 0$, $\overline{T_{0,(0,1)}} = 0$, $\overline{T_{2,(0,0)}} = 0$. Також очевидно, що $\overline{T_{1,(0,0)}} = e^{-\lambda\tau}$, $\overline{T_{0,(0,0)}} = \overline{T_{0,(n,0)}} = \overline{T_{0,(n,1)}} = 1/\lambda$, $n = 1, 2, \dots$. За означенням $\overline{T_1}$, $\overline{T_2}$ маємо

$$\overline{T_1} = e^{-\lambda\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{1,(n,0)}} + \overline{T_{1,(n,1)}}), \quad \overline{T_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}}).$$

3.3. Обчислення \overline{T} . Середній час \overline{T} між двома послідовними заходами у стан C_0 задається виразом

$$\overline{T} = \overline{T_0} + \overline{T_1} + \overline{T_2} = \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{1,(n,0)}} + \overline{T_{1,(n,1)}} + \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}}), \quad (17)$$

або

$$\overline{T} = \overline{T_0} + \overline{T_1} + \overline{T_2} = \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n, \quad (18)$$

де

$$S_n = \overline{T_{1,(n,0)}} + \overline{T_{1,(n,1)}} + \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} =$$

$$\int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \right) +$$

$$+ \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_{\tau}^{\infty} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \tau \right).$$

Врахуємо тут, що $\int_{\tau}^{\infty} e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} = e^{-\lambda\tau}$, тоді

$$S_n = \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i +$$

$$+ e^{-\lambda\tau} \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^n x_i + \tau \right).$$

Тут у першому доданку інтеграл по x_{n+1} подамо у вигляді $\int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} = \int_0^{\tau} dx_{n+1} - \int_{\tau-x_n}^{\tau} dx_{n+1}$:

$$S_n = \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_0^{\tau} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i + \\
 & + e^{-\lambda \tau} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^n x_i + \tau \right).
 \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$I_0(\lambda, \tau, n) = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$I_1(\lambda, \tau, n) = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \sum_{i=1}^n x_i,$$

де $n = 1, 2, \dots$. Тоді

$$\begin{aligned}
 S_n &= \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \\
 & - \lambda^{n+1} I_1(\lambda, \tau, n+1) + e^{-\lambda \tau} \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) + \tau e^{-\lambda \tau} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n).
 \end{aligned}$$

Для перетворення останнього виразу використаємо формули $\int_0^\tau e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} = 1 - e^{-\lambda \tau}$, $\int_0^\tau e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda x_{n+1} dx_{n+1} = -\tau e^{-\lambda \tau} - \frac{e^{-\lambda \tau}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
 S_n &= (1 - e^{-\lambda \tau}) \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) + \left(-\tau e^{-\lambda \tau} - \frac{e^{-\lambda \tau}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) - \\
 & - \lambda^{n+1} I_1(\lambda, \tau, n+1) + e^{-\lambda \tau} \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) + \tau e^{-\lambda \tau} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n),
 \end{aligned}$$

або після скорочення

$$S_n = \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) - \lambda^{n+1} I_1(\lambda, \tau, n+1) + \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n).$$

Отже⁵,

$$\bar{T} = \frac{2}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda \tau}}{\lambda} + \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n). \quad (19)$$

3.4. Обчислення \bar{T}_2 і \bar{T}_1 . Обчислення, аналогічні попереднім, виконаємо для \bar{T}_2 :

$$\bar{T}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}}).$$

⁵ Використано рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) = 0$, яка доводиться виходячи з оцінки $I_1(\lambda, \tau, n) < n \tau I_0(\lambda, \tau, n)$ і оцінки з примітки на с. 1634.

Тут доданки з певним n мають вигляд

$$\begin{aligned}
& \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} = \\
& = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_\tau^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\
& \quad + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) + x_{n+1} \right) = \\
& = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_\tau^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\
& \quad + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) - \tau + x_n + x_{n+1} \right) = \\
& = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_\tau^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\
& \quad + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) - \tau + x_n + x_{n+1} \right) - \\
& \quad - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) - \tau + x_n + x_{n+1} \right) = \\
& = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} (-\tau + x_n + x_{n+1}) - \\
 & - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\
 & \quad \times \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) - \tau + x_n + x_{n+1} \right) = \\
 & = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) - \\
 & - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\
 & + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} (x_n + x_{n+1} - \tau) - \\
 & - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} (x_n + x_{n+1} - \tau).
 \end{aligned}$$

Використаємо співвідношення $\lambda \int_0^\tau (x_k + x_n - \tau) e^{-\lambda x_k} dx_k - \lambda \int_{\tau-x_n}^\tau (x_k + x_n - \tau) e^{-\lambda x_k} dx_k = -\frac{e^{\lambda x_n - \lambda \tau}}{\lambda} + x_n - \tau + \frac{1}{\lambda}$, $k = n + 1$:

$$\begin{aligned}
 & \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} = \\
 & = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) \right) - \\
 & - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\
 & + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n-1} \left(1 - e^{\lambda(x_n - \tau)} \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

При цьому врахуємо, що $\int_0^{\tau-x_n} e^{-\lambda x_{n+1}} dx_{n+1} = (1 - e^{\lambda(x_n - \tau)}) / \lambda$:

$$\overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) \right) - \\
&- \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\
&+ \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^n.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} = \\
&= \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) \right) - \\
&- \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \times \\
&\quad \times \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \frac{1}{\lambda} p_{(n,1)},
\end{aligned}$$

де $p_{(n,1)}$ — ймовірність сценарію $(n, 1)$, задана формулою (15). З останнього виразу знаходимо⁶

$$\overline{T_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} p_{(n,1)}. \quad (21)$$

Використовуючи (20), співвідношення (21) можна подати таким чином:

$$\begin{aligned}
\overline{T_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^n - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^n = \\
&= (1 - e^{-\lambda\tau}) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^{n-1} -
\end{aligned}$$

⁶ Враховано, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) = 0$.
Останнє доводиться так само, як і в примітці на с. 1629.

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_{\tau-x_n}^{\tau} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^n = \\
 & = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1} I_0(\lambda, \tau, n+1) = \\
 & = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) + I_0(\lambda, \tau, 1) = \\
 & = I_0(\lambda, \tau, 1) - \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n),
 \end{aligned}$$

звідки

$$\bar{T}_2 = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n). \tag{22}$$

Тепер \bar{T}_1 можна знайти як $\bar{T}_1 = \bar{T} - \bar{T}_0 - \bar{T}_2$ на основі формул (19), (22) і (8):

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n). \tag{23}$$

3.5. Обчислення $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n)$. Перетворимо окремий доданок у шуканій сумі таким чином:

$$\begin{aligned}
 \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) &= \lambda^n \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} = \\
 &= q^n e^{-nq} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \dots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n e^{q \sum_{i=1}^n x_i},
 \end{aligned}$$

де $q = \lambda\tau$. Тут виконано наступне перетворення змінних інтегрування: $x_i \rightarrow \tau(1 - x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Перепишемо останнє у вигляді

$$\lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) = \int_0^1 dx_1 q e^{q(x_1-1)} \int_0^{1-x_1} dx_2 q e^{q(x_2-1)} \dots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n q e^{q(x_n-1)}$$

і введемо інтегральний оператор

$$(M(q)f)(x) = q e^{q(x-1)} \int_0^{1-x} f(z) dz.$$

Тоді

$$\lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) = \int_0^1 dx ((M(q))^{n-1} g)(x),$$

де $g(x) = q e^{q(x-1)}$. Відповідно

$$\begin{aligned} S &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 dx ((M(q))^{n-1} g)(x) = \\ &= 1 - e^{-q} + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 dx ((M(q))^{n-1} g)(x) = \\ &= 1 - e^{-q} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dx ((M(q))^n h)(x), \end{aligned}$$

де

$$h(x) = (M(q)g)(x) = q e^{-q} - q e^{q(x-2)}.$$

Зауважимо, що $h(1) = 0$ і оператор $M(q)$ зберігає цю властивість. Припустимо, що область визначення оператора $M(q)$, $D \equiv D(M(q))$, складається з обмежених функцій $f(x)$, заданих на відрізку $x \in [0; 1]$. Нехай топологія в D задається нормою $\|f\| = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$, тоді оператор взяття інтеграла по відрізку $[0; 1]$ буде неперервним із D в R^1 . Крім того, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((M(q))^n h)(x)$$

збігається за нормою в D . Дійсно, норма оператора M оцінюється таким чином:

$$\|M(q)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \left\| \frac{q e^{q(x-1)} \int_0^{1-x} f(z) dz}{\|f\|} \right\| \leq \sup_{x \in [0; 1]} q e^{q(x-1)} (1-x). \quad (24)$$

Останній вираз оцінюється числом $e^{-q} < 1$. Звідси випливає, що окремий доданок ряду оцінюється таким чином⁷:

$$\sup_{x \in [0; 1]} |((M(q))^n h)(x)| = \|((M(q))^n h)\| \leq e^{-nq} \|h\|,$$

де

$$\|h\| = q e^{-q} - q e^{-2q}.$$

Отже, в останньому виразі для S можна поміняти порядок інтегрування і підсумовування:

$$S = 1 - e^{-q} + \int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} ((M(q))^n h)(x). \quad (25)$$

⁷ Звідси, зокрема, випливає оцінка $\lambda^{n+2} I_0(\lambda, \tau, n+2) < e^{-nq} \|h\|$, $n \geq 0$, потрібна в примітці на с. 1629.

Розглянемо функцію $f(x) \in D$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ((M(q))^n h)(x). \tag{26}$$

Тоді

$$S = 1 - e^{-q} + \int_0^1 f(x) dx. \tag{27}$$

З викладеного вище випливає, що $f(x)$ є обмеженою на $[0; 1]$. Крім того, справеджується рівняння

$$f - M(q)f = h,$$

або

$$f(x) - qe^{q(x-1)} \int_0^{1-x} f(y)dy = qe^{-q} - qe^{qx-2q}. \tag{28}$$

Останнє рівняння розв'язане в додатку. Явний вираз $f(x)$ для $0 < q \leq \ln(4)$ і для $q \geq \ln(4)$ задається формулами (34) і (35) відповідно. Застосовуючи формули (27) до (34) і (35), для $q \leq \ln(4)$ отримуємо

$$S(q) = \frac{s(q) \sin\left(\frac{qe^{-q/2}s(q)}{2}\right) + \left(e^{\frac{q}{2}} - 2e^{-\frac{q}{2}}\right) \cos\left(\frac{qe^{-q/2}s(q)}{2}\right) + 1}{2e^{-\frac{q}{2}} \cos\left(\frac{qe^{-q/2}s(q)}{2}\right) + 1}, \tag{29}$$

де $s(q) = \sqrt{4 - e^q}$.

Для $q \geq \ln(4)$ одержуємо вираз

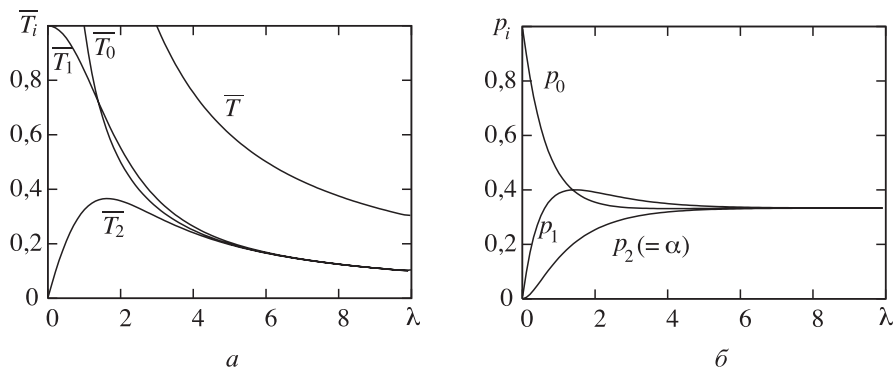
$$S(q) = \frac{-s_1(q) \sinh\left(\frac{qe^{-q/2}s_1(q)}{2}\right) + \left(e^{\frac{q}{2}} - 2e^{-\frac{q}{2}}\right) \cosh\left(\frac{qe^{-q/2}s_1(q)}{2}\right) + 1}{2e^{-\frac{q}{2}} \cosh\left(\frac{qe^{-q/2}s_1(q)}{2}\right) + 1}, \tag{30}$$

де $s_1(q) = \sqrt{e^q - 4}$. Після підстановки одержаних для $S(q)$ виразів замість суми ряду в (19), (22), (23) отримуємо явні вирази для середніх значень часу $\overline{T_1}$, $\overline{T_2}$, $\overline{T} = \overline{T_0} + \overline{T_1} + \overline{T_2}$, перебування нейрона у станах C_1 , C_2 у проміжку між двома послідовними заходами у стан C_0 і середню тривалість цього проміжку як функції λ , τ . Графіки цих функцій побудовано на рисунку. Підставивши знайдені функції в (12), одержимо α як функцію λ , τ . Графіки цієї функції та ймовірностей станів C_0 , C_1 показано на рисунку.

Вихідна інтенсивність залежить від вхідної таким чином:

$$\lambda_0 = \frac{1 - e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} S(\lambda\tau)}{2 - e^{-\lambda\tau} + (1 - e^{-\lambda\tau}) S(\lambda\tau)} \lambda. \tag{31}$$

Можна довести, що $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_0/\lambda = 1/3$, що узгоджується з інтуїтивним очікуванням.



Середні значення часу перебування нейрона у станах C_0, C_1, C_2 у проміжку між двома послідовними заходами у стан C_0 і середня тривалість цього проміжку, \bar{T} , як функції λ при $\tau = 1$ с (а) та ймовірності знаходження нейрона у станах C_0, C_1, C_2 в будь-який момент часу (б).

Зауваження 2. Нехай $p_0 = \bar{T}_0/\bar{T}$, $p_1 = \bar{T}_1/\bar{T}$, $p_2 = \bar{T}_2/\bar{T} = \alpha$ – ймовірності знаходження ПЗН в довільний момент часу в стані C_0, C_1, C_2 відповідно. Знаходження цих ймовірностей для більш простих систем складає зміст задачі Ерланга (див. [7] (§ 18)). У даній роботі для ПЗН одержано більш детальну інформацію, ніж вимагається в задачі Ерланга, зокрема значення величин \bar{T}_k .

Додаток. Спочатку слід пересвідчитись, що рівняння (28) має не більше одного розв'язку. Для цього необхідно і достатньо, щоб рівняння $f - M(q)f = 0$ мало лише нульовий розв'язок. Останнє випливає з оцінки норми оператора $M(q)$ (24). Дійсно, якщо $f = M(q)f$, то $\|f\| = \|M(q)f\| \leq e^{-q}\|f\|$. Останнє є можливим лише для $f(x) = 0$. Зауважимо, що розв'язок рівняння (28) існує. Дійсно, він задається збіжним за нормою рядом (26). Наша мета – одержати вираз для функції $f(x)$ через елементарні функції, який не містить підсумовування нескінченного ряду.

Поділимо рівняння (28) на $qe^{q(x-1)}$ і здиференціюємо по x :

$$e^{q(1-x)} \frac{d}{dx} f(x) - q e^{q(1-x)} f(x) + q f(1-x) = -q^2 e^{-qx}, \quad f(1) = 0. \quad (32)$$

Останнє рівняння разом з граничною умовою є еквівалентним (28). Дійсно, зінтегруємо (32) по інтервалу $[x; 1]$ і використаємо граничну умову:

$$q \int_x^1 f(1-z) dz - e^{q-qx} f(x) = q e^{-q} - q e^{-qx}.$$

Останнє переходить у (28) після заміни змінної інтегрування z на $1-y$.

Підставимо в (28) $1-x$ замість x і знайдемо з одержаного рівняння вираз для $f(1-x)$:

$$f(1-x) = q e^{-qx} \int_0^x f(y) dy - q e^{-qx-xq} + q e^{-q}.$$

Підставимо цей вираз в (32):

$$q^2 e^{-qx} \int_0^x f(y) dy + e^{q(1-x)} \frac{d}{dx} f(x) - q e^{q(1-x)} f(x) - q^2 e^{-qx-q} + q^2 e^{-q} = -q^2 e^{-qx}.$$

Домножимо останнє рівняння на e^{qx} і здиференціюємо по x :

$$e^q \frac{d^2}{dx^2} f(x) - q e^q \frac{d}{dx} f(x) + q^2 f(x) + q^3 e^{qx-q} = 0. \tag{33}$$

Розв'язок останнього рівняння має задовольняти і рівняння (32) разом із граничною умовою. Це дає можливість визначити дві довільні константи в загальному розв'язку (33). Загальний розв'язок рівняння (33) має вигляд

$$f(x) = e^{qx/2} \left(K_1 \sin \left(\frac{q e^{-q/2} \sqrt{4 - e^q} x}{2} \right) + K_2 \cos \left(\frac{q e^{-q/2} \sqrt{4 - e^q} x}{2} \right) \right) - q e^{qx-q}$$

при $e^q \leq 4$ і

$$f(x) = e^{qx/2} \left(K_1 \sinh \left(\frac{q e^{-q/2} \sqrt{e^q - 4} x}{2} \right) + K_2 \cosh \left(\frac{q e^{-q/2} \sqrt{e^q - 4} x}{2} \right) \right) - q e^{qx-q}$$

при $e^q \geq 4$.

Після визначення констант отримаємо наступні вирази для $f(x)$:

$$f(x) = q e^{\frac{qx}{2} + \frac{3q}{2}} \left(\frac{2 \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q} x}{2} \right)}{2 e^{2q} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} - \frac{\sqrt{4 - e^q} \sin \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q} (x - 1)}{2} \right)}{2 e^{2q} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} + \frac{e^{\frac{q}{2}} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q} (x - 1)}{2} \right)}{2 e^{2q} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} \right) - q e^{qx-q} \quad \text{при } e^q \leq 4, \tag{34}$$

і

$$\begin{aligned}
f(x) = q e^{\frac{qx}{2} + \frac{3q}{2}} & \left(\frac{2 \cosh\left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4} x}{2}\right)}{2 e^{2q} \cosh\left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4}}{2}\right) + e^{\frac{5q}{2}}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{e^q - 4} \sinh\left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4} (x-1)}{2}\right)}{2 e^{2q} \cosh\left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4}}{2}\right) + e^{\frac{5q}{2}}} + \\
& \left. + \frac{e^{\frac{q}{2}} \cosh\left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4} (x-1)}{2}\right)}{2 e^{2q} \cosh\left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4}}{2}\right) + e^{\frac{5q}{2}}} \right) - q e^{qx-q} \quad \text{при } e^q \geq 4. \quad (35)
\end{aligned}$$

1. *Відибіда О. К.* Гальмування як контроллер зв'язування на рівні поодинокого нейрона // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 161–164.
2. *Vidybida A. K.* Inhibition as binding controller at the single neuron level // BioSystems. – 1998. – **48**. – P. 263–267.
3. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. – 1952. – **125**. – P. 221–224.
4. *Segundo J. P., Perkel D., Wyman H., Hegstad H., Moore G. P.* Input-output relations in computer-simulated nerve cell // Kybernetic. – 1968. – **4**. – P. 157–171.
5. *Зарицький А. Ф.* К математической теории отображения информации в нейронных сетях // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1706–1707.
6. *Гусденко Б. В.* Курс теорії ймовірностей. – Київ; Львів: Рад. шк., 1950. – 360 с.
7. *Хинчин А. Я.* Математические методы теории массового обслуживания // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1955. – **49**. – 122 с.
8. *Алимов Д.* Три примера марковских функционалов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 299–304.
9. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120 с.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. – М.: Мир, 1967. – Т. 2. – 752 с.

Одержано 26.04.06,
після доопрацювання – 08.12.06