

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ
ім. М.М.Боголюбова

О.К.Відібіда

**СТОХАСТИЧНІ
МОДЕЛІ**

КИЇВ, 2006

УДК 531.19+519.216+543.9+577.354.3

Стохастичні моделі/О.К. Відібіда – Київ, 2006. – 204 с.

Подано елементи теорії стохастичних процесів з точки зору їх практичного застосування до задач нанотехнології, хімічної кінетики, сенсорних систем, нейрофізики. Матеріал базується на прямих і зворотних балансних рівняннях (Master Equations) для систем із скінченною множиною детерміністичних станів. Виклад зосереджено навколо формул для обчислення середніх часів перебування над і під заданим порогом. Застосування цих формул проілюстровано на прикладах оцінки селективності хеморецепторного нейрона і хімічного наносенсора. Розглянуто сучасні моделі нейронів, досліджено їх стохастичні властивості. Методом граничного переходу виведено рівняння Фоккера-Планка для броунівського руху. В додатках подано програми мовою С для чисельного моделювання стохастичних процесів і результати їх тестування. Книжка буде корисною для фахівців та студентів старших курсів і аспірантів природничих, економічних і технічних спеціальностей. Табл. 5. Іл. 38. Бібліогр.: 26 назв.

*Затверджено до друку вченого радою
Інституту теоретичної фізики НАН України ім. М.М.Боголюбова*

Рецензенти:

Петров Е.Г., чл.-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор;
Ребенко О.Л., доктор фізико-математичних наук, професор.

*Роботу над книжкою підтримано комплексною програмою
фундаментальних досліджень НАН України “Дослідження у
галузі сенсорних систем та технологій”*

ISBN 966-02-3882-7

© О. К. Відібіда, 2006

Зміст

Передмова	1
1 Системи зі скінченим числом станів	5
1.1 Вступ	5
1.1.1 Ймовірнісний прогноз	5
1.1.2 Стани системи і граф переходів	7
1.1.3 Скінченні і нескінченні множини станів	8
1.1.4 Причини стохастичності в природі	9
1.2 Стохастичні процеси	11
1.2.1 Процеси без післядії	15
1.2.2 Перехідні ймовірності	16
1.3 Диференціальні рівняння	18
1.3.1 Балансне рівняння	19
1.3.2 Поведінка розв'язків балансного рівняння	21
1.3.3 Асимптотична поведінка розв'язків	26
1.3.4 Зворотне балансне рівняння	32
1.3.5 Балансні рівняння для системи зі стоком	33
1.3.6 Середній час життя системи зі стоком	38
1.4 Конкретні системи	48
1.4.1 Хімічні реакції	48
1.4.2 Поодинокий рецептор	50

1.4.3	Флуктуації в системі N рецепторів	53
1.5	Застосування	61
1.5.1	Селективність хеморецепторного нейрона . .	61
1.5.2	Селективність порогового хімічного сенсора	68
2	Системи зі зліченним числом станів	77
2.1	Інтегральний пуассонівський лічильник	77
2.2	Інформація інтегрального лічильника	81
2.3	Циклічний пуассонівський лічильник	83
2.4	Інформація циклічного лічильника	86
2.5	Циклічний + інтегральний лічильник	87
2.6	Розподіл міжімпульсних інтервалів	94
2.7	Інформація лічильника	94
2.8	Зв'язуючий нейрон	96
2.8.1	Розподіл вихідних інтервалів, $N_0 = 2$	98
2.8.2	Інтенсивність вихідного потоку, $N_0 = 2$. . .	103
2.8.3	Інтенсивність вихідного потоку, $N_0 = 3$. . .	111
3	Системи з неперервною множиною станів	133
3.1	Частинка на інтервалі	135
3.2	Детерміністична динаміка	136
3.3	Випадкове блукання	138
3.3.1	Блукання без дрейфу	138
3.3.2	Блукання з дрейфом	142
Додаток А		145
A.1	Генерація випадкових чисел	145
A.1.1	Метод відбору	146
A.1.2	Метод відображення	150
A.2	Моделювання процесу Пуассона	152
A.2.1	Метод відображення	156

A.2.2 Метод сортування	158
A.3 Моделювання випадкових блукань	162
Додаток В	169
B.1 Асимптотика для інтегрального лічильника	169
B.2 Асимптотика для циклічного лічильника	175
B.3 Циклічний+інтегральний лічильники	178
Додаток С	181
C.1 Допоміжна границя для нейрона з $N_0 = 2$	181
C.2 Допоміжні функції для нейрона з $N_0 = 3$	183
Бібліографія	187
Покажчик	190

Перелік ілюстрацій

1.1	Лінійний граф переходів	6
1.2	Нелінійний граф переходів	8
1.3	До виведення балансного рівняння	19
1.4	Система без детального балансу	30
1.5	До виведення зворотного балансного рівняння	32
1.6	Граф переходів для поглинання в стані $N + 1$	34
1.7	Граф переходів для системи зі стоком у стані N	34
1.8	Граф переходів для системи зі стоком в стані 0	42
1.9	Граф переходів в нових позначеннях	42
1.10	Система зі стоком на обох кінцях	44
1.11	Граф переходів для окремого рецептора	50
1.12	Спрощена конструкція хеморецепторного нейрона	61
1.13	До означення селективності рецепторного білка	62
1.14	До означення селективності рецепторного нейрона	64
1.15	Схематичне зображення порогового детектора	68
1.16	Залежності селективності від концентрацій	75
1.17	Сегмент траекторії процесу адсорбції-десорбції	76
2.1	Граф переходів інтегрального лічильника	78
2.2	Граф переходів циклічного лічильника	84
2.3	γ -розподіл	95

2.4 Схематичне зображення зв'язуючого нейрона	97
2.5 Розподіл вихідних інтервалів зв'язуючого нейрона .	102
2.6 Графік функції $f_a(t)$	104
2.7 Передавальна функція для порогу 2	109
2.8 Схема можливих переходів для порогу 3	111
2.9 Приклади сценаріїв для порогу 3	114
2.10 До обчислення $p_{(n,1)}$	116
2.11 До обчислення $p_{(n,0)}$	116
2.12 Час перебування нейрона в станах C_0, C_1, C_2 . .	129
2.13 Передавальна функція для порогу 3	131
3.1 Граф переходів для частинки на інтервали $[0; L]$. . .	135
3.2 Наближення до детерміністичного руху	138
3.3 Приклади випадкових блукань із дрейфом	144
A.1 Відбір випадкових чисел з бажаним розподілом . .	147
A.2 Перевірка валідності методу сортування	162

Перелік таблиць

1.1	Константи швидкостей, що використовуються в прикладах	75
1.2	Чисельні приклади покрашеної селективності	76
2.1	Окремі доданки в формулі (2.27)	88
2.2	Окремі доданки в формулі (2.29)	90
A.1	Перевірка валідності методу відбору	148

x

Передмова

В результаті науково-технічного прогресу виникла можливість описувати в термінах причинно-наслідкових зв'язків процеси і явища, однозначне передбачення перебігу яких неможливе в принципі. Практична потреба в такому описі наявна, зокрема, в нанотехнології, де розмір конструктивних елементів настільки малий, що тепловий хаотичний рух складає значну частину їх активності. Те ж саме спостерігається в хімічних сенсорах малого розміру, а також у білкових молекулах м'язів. Рух молекули актину вздовж міозину в м'язах, який спричиняє їх скорочення, не тільки відбувається в умовах постійних хаотичних поштовхів, але і використовує їх. Фізико-хімічні явища в поодинокій біологічній клітині, наприклад активація певного гену або індукція імунного відгуку, часто відбуваються при взаємодії всього декількох десятків біологічних макромолекул. За цих обставин броунівський рух вносить відчутний елемент випадковості в динаміку таких явищ. Інша практична область, де неможливе однозначне передбачення, — діяльність фондових бірж. Тут випадковість динаміки виникає в результаті дій окремих учасників біржових торгів, наміри яких можливо передбачити лише з певною ймовірністю. Разом із тим, для встановлення обґрунтованих цін необхідно оцінювати можливі ризики, які виникають при здійсненні біржових операцій. Ще одна галузь, де бажано мати певний прогноз за обставин, коли однозначне передбачення неможливе, — це динаміка земної атмосфери або світового океану. Тут випадковість вини-

кає остільки, осільки початковий стан системи не повністю відомий, а притаманні механіці рідини або газу внутрішні нестійкості збільшують невизначеність, неістотну на початку, до практично важливої величини. Значний елемент випадковості спостерігається в екології при спостереженні динаміки популяцій комах та інших живих істот.

Випадковість динаміки перечислених вище і подібних їм явищ неможливо усунути в принципі. Тим не менше, можливо одержати змістовний і практично цінний прогноз поведінки таких систем, якщо застосовувати адекватний математичний аппарат. Такий апарат відомий як теорія стохастичних процесів. Теорія стохастичних процесів — відносно молодий розділ математики, в якому питання обґрунтування ще не повністю відділені від набору практичних методів. Застосування теорії стохастичних процесів нематематиками для своїх задач стає проблематичним, оскільки для цього фізики, хіміки, біологи, економісти повинні знайомитись не тільки з набором практичних рецептів теорії, але і з елементами її обґрунтування, — такими, як теорія міри, функціональний аналіз та ін.

Мета даної книжки — на прикладі простих систем з фізики, хімії, біології викласти декілька практичних результатів теорії стохастичних процесів у формі, зручній для застосувань. При цьому опускаються питання обґрунтування, що полегшує вимоги до математичної підготовки читача. З метою спрощення і більшої прозорості викладу, в основному, розглядаються тільки системи зі скінченною або дискретною множиною станів. Доведення частини математичних оцінок винесено в додатки, що полегшує прочитання книжки.

Підручник складається з трьох розділів і додатків. У першому розділі даються основні означення та виводяться пряме і зворотне балансні рівняння для систем із довільним графом переходів. Розглянуто основні властивості розв'язків балансних рівнянь, розуміння яких сприяє ефективному застосуванню теорії. Основна увага в першому розділі зосереджена на формулах для обчисле-

ння середнього часу досягнення порогу. Практичну корисність таких формул важко переоцінити, оскільки вони дозволяють обчислити швидкості реакцій у хімії, швидкість переходу з одного стабільного стану в інший або швидкість утворення дисипативної структури в синергетиці, час очікування страхової події або час існування фірми до банкрутства в бізнесі, час екстинкції виду в екології та ін. В книзі дається виведення цих формул для систем із лінійним графом переходів і поглинанням/стоком на одному з двох кінців, або на двох кінцях одночасно. Решту розділу присвячено застосуванню виведених формул до оцінки селективності хеморецепторного нейрона і порогового хімічного сенсора.

В другому розділі розглядаються системи зі зліченим числом станів. Виклад зосереджено, в основному, навколо пуассонівського процесу і моделей, які від нього походять. У застосуванні до нейронних систем одержано оцінки кількості інформації, здобутої при спостереженні за пуассонівським і похідними від нього процесами. В другій половині цього розділу описано нову модель нейрона — “зв’язуючий нейрон”. Для зв’язуючого нейрона, стимульованого пуассонівським процесом, одержано явний вигляд передавальної функції. Для найпростішої ж моделі одержано повний опис вихідного немарківського процесу в термінах густини розподілу ймовірності міжімпульсних інтервалів.

У третьому розділі розглядаються системи з неперервною множиною станів. Виклад обмежується одно- і двосторонніми стрибками на прямій. Відповідні балансні рівняння для випадкового блукання з дрейфом і без нього на прямій (рівняння Фоккера-Планка) одержуються методом граничного переходу, коли довжина стрибка, d , прямує до нуля, а частота стрибків — до безмежності як $1/d^2$.

В додатках наводиться матеріал, корисний для чисельного дослідження стохастичних моделей. Зокрема, наведено декілька алгоритмів для генерації випадкових чисел із заданим розподілом, для чисельного моделювання процесу Пуассона, для чисельного моделювання випадкових блукань на прямій. Всі алгоритми су-

проводжуються вихідними текстами програм мовою С, протестованими автором. Результати тестувань подано в формі таблиць і графіків. В додатки також винесено доведення деяких формул і нерівностей, вжитих в основному тексті.

Для освоєння матеріалу данної книжки читачеві вистачить попередньої математичної підготовки в обсязі перших двох курсів фізичного факультету університету. Книга також буде доступною студентам старших курсів та аспірантам природничих і економічних спеціальностей.

Розділ 1

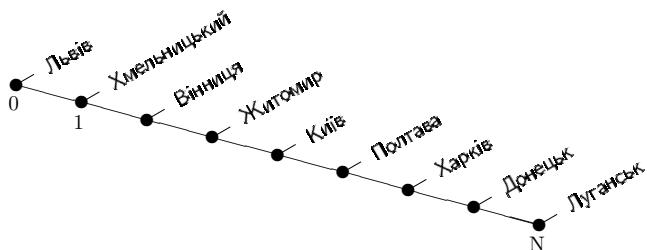
Системи зі скінченим числом станів

1.1 Вступ

1.1.1 Ймовірнісний прогноз

У практичній діяльності часто існує необхідність і можливість прогнозувати розвиток у часі певних подій чи явищ. Наприклад, коли ми сідаемо в вагон поїзда, то з графіку руху, який звичайно вивішують у вагонах, ми можемо досить впевнено передбачити, коли і на яких станціях буде зупинятись поїзд.

При цьому ми з впевненістю можемо стверджувати, що поїзд, скажімо, о 14⁴⁵ буде стояти на ст. Вінниця і ні на якій іншій станції. Це ж станеться і наступного дня та пізніше, поки не поміняється розклад. У цьому випадку ми кажемо, що система допускає детерміністичний прогноз. Для ілюстрації протилежної ситуації уявімо собі гральний кубик, поміщений на лабораторному столі, поверхня якого може вібрувати. Покладемо кубик так, що зверху буде одне очко, і ввімкнемо вібрацію на короткий час



Мал. 1.1. До прикладу з поїздом

Δt , наприклад, 0,1 с. Після цього подивимось, яка грань дивиться вгору. Якщо вібрація не дуже інтенсивна, то кубик може змінювати своє положення тільки шляхом перекочування через одне з ребер. Якщо занумерувати можливі положення кубика відповідно до кількості очок на верхній грани, то вихідним було положення 1. Після короткотривалої вібрації кубик опиниться в одному з положень, які утворюють наступну множину: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ми вважаємо, що час вібрації був такий короткий, що могло відбутись не більше одного перекочування, отже положення 6 недосяжне. Якщо цей експеримент повторити n разів, де n досить велике, то ми побачимо, що положення кубика після вібрації не визначається однозначно його початковим положенням. Результатом n -кратного експерименту буде те, що приблизно n_1 разів фінальне положення кубика буде 2, $n_1 - 3$, $n_1 - 4$, $n_1 - 5$ і $n_0 = n - 4n_1$ разів положення кубика не зміниться. Це природно сформулювати в термінах розподілу ймовірності одержати певне положення кубика: фінальне положення може бути одним із положень $\{2, 3, 4, 5\}$ з імовірністю $a_1 = n_1/n$ і може не змінитися з імовірністю $a_0 = n_0/n = 1 - 4a_1$. Отже, природа даного явища (поведінка кубика на вібраторій поверхні) не дозволяє зробити детерміністичний прогноз. У той же час певний прогноз у термінах ймовірності може бути зроблено. Перш за все це те, що ймовірності знайти кубик у положеннях $\{2, 3, 4, 5\}$ рівні між собою, а ймовірність одержати положення 6 — нульова, якщо вібрація короткотрива-

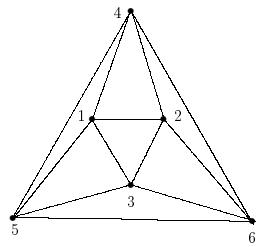
ла. Далі, якщо проміжок часу Δt зменшувати, то можна буде пересвідчитись, що ймовірність a_1 також зменшується, а a_0 — зростає. Конкретні залежності $a_0(t)$, $a_1(t)$ можна визначити або експериментально, або на основі додаткової інформації про вплив вібрації на рух кубика, котра в даному розділі не обговорюється. Якщо ж навпаки, $\Delta t \rightarrow \infty$, то фінальне положення буде одним із $\{1,2,3,4,5,6\}$ з імовірністю $1/6$. Ці висновки можна одержати, експериментуючи з реальним кубиком і вібратором столом. При цьому необхідне багаторазове повторення одного і того ж експерименту, оскільки елементарне означення ймовірності вимагає такого повторення. Прогноз такого типу називається ймовірнісним або стохастичним, оскільки він не дає конкретної відповіді на питання, яким буде положення кубика в певний момент часу, а оцінює ймовірність одержати те чи інше положення.

1.1.2 Стани системи і граф переходів

В прикладі з кубиком числа $\{1,2,3,4,5,6\}$, котрі визначають відповідні положення кубика, називаються детерміністичними, або елементарними станами. В прикладі з поїздом елементарними станами будуть станції, на яких є зупинки (мал.1.1). В обох прикладах початковий стан системи — це один із можливих елементарних станів. Кінцеві стани — це також елементарні стани в обох прикладах. Різниця між прикладами виникає, коли потрібно зробити прогноз. Якщо для поїзда можна точно передбачити, на якій зупинці він буде стояти через певний проміжок часу, то для кубика можна ставити питання тільки про ймовірність того чи іншого елементарного стану. Отже, найбільше, що можна знати про кінцевий стан кубика до виконання самого експерименту, це ймовірності

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\} \quad (1.1)$$

того, що в кінцевому стані випаде те чи інше число. Набір (1.1) називається розподілом ймовірності або стохастичним, чи ймовірнісним станом системи. Зі сказаного в попередньому пункті



Мал. 1.2. До прикладу з гральним кубиком

виходить, що стохастичний стан кубика при $\Delta t \rightarrow 0$ — це розподіл $\{1,0,0,0,0,0\}$, а при $\Delta t \rightarrow \infty$ — розподіл $\{\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\}$. При малих скінчених Δt стохастичний стан описується розподілом $\{1 - 4a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, 0\}$, при чому a_1 — зростаюча функція Δt . Для визначення цієї функції потрібна додаткова інформація про вплив вібрації на рух кубика.

Нехай деяка система має скінченнє число детерміністичних станів. Занумерувавши їх числами від 0 до N , можна ці самі числа трактувати як детерміністичні стани системи. Будемо казати, що елементарні стани n_1 і n_2 суміжні, якщо система може безпосередньо перейти з одного стану в інший, не побувавши при цьому в станах, відмінних від n_1 , n_2 . При цьому слід розрізняти переходи $n_1 \rightarrow n_2$ і $n_2 \rightarrow n_1$. Граф переходів будеться наступним чином. Вершини графа відповідають елементарним станам, орієнтовані ребра (стрілки) — можливим безпосереднім переходам. Наприклад, для поїзда граф переходів зображенено на мал. 1.1. Для прикладу з кубиком граф переходів зображенено на мал. 1.2. Стрілки на малюнках опущено, оскільки переходи можливі в обох напрямках.

1.1.3 Скінченні і нескінченні множини станів

В деяких випадках опис системи скінченним набором детерміністичних станів не відповідає суті системи. Наприклад, положення

молекули в колбі з газом прийнято описувати неперервними змінними (x, y, z) , які приймають континуум значень. В деяких випадках систему з правдиво скінченим числом станів буває зручно розглядати як систему з нескінченою або неперервною множиною станів. Наприклад, кількість фінансових ресурсів банку є обмеженою величиною і вимірюється з точністю до копійки. Отже, число станів тут скінченнє. Разом із тим, коли неможливо встановити верхню межу для ресурсів банку, то природньо розглядати як множину станів зліченну множину всіх натуральних чисел. Якщо врахувати, що для банків із великим ресурсом величина в 1 копійку може розглядатись як нескінченно мала, то ресурс банку можна розглядати як неперервну величину, котра може приймати континуум значень.

Для систем зі скінченим, зліченним і континуальним наборами станів будемо записувати розподіл імовірності в момент t , відповідно, в вигляді $p(n, t)$, $n = 0, 1, \dots, N$, $p(n, t)$, $n = 0, 1, \dots, p(x, t)$, $x \in [x_m; x_M]$, де $[x_m; x_M]$ — інтервал можливих значень континуального стану¹. Для перелічених систем, відповідно, мають місце умови нормування:

$$\sum_{0 \leq n \leq N} p(n, t) = 1, \quad \sum_{0 \leq n < \infty} p(n, t) = 1, \quad \int_{x_m}^{x_M} p(x, t) dx = 1. \quad (1.2)$$

1.1.4 Причини стохастичності в природі

Причини того, що для деяких систем детерміністичний прогноз неможливий і слід задоволітися ймовірнісним, різні для різних систем. Наприклад, у квантовій механіці необхідність імовірнісного описання пов'язана з корпускулярно-хвильовим дуалізмом. Більш проста причина виникає тоді, коли початковий стан

¹Для систем із континуальним набором станів функція $p(x, t)$ називається густинною розподілу. Математичне означення розподілу ймовірності для континуальних систем можна знайти в книжці [1].

системи — ймовірнісний. Це означає, що відомий розподіл імовірності $p(n, 0)$, який стверджує: в момент $t = 0$ система може перебувати в стані n з імовірністю $p(n, 0)$, $n = 0, 1, \dots, N$. У цьому випадку твердження про кінцевий стан у момент часу t буде також імовірнісним, оскільки цей стан залежить від початкового стану. В прикладі з кубиком стохастичність виникає при еволюції системи, оскільки вібрації поверхні нерегулярні і нема конкретної функції, котра б їх описувала детерміністичним чином. Отже, тут стохастичність в поведінку кубика привнесено ззовні як випадковий зовнішній чинник.

Для систем із неперервною множиною станів виникає проблема точності знання початкового стану. Деякі з неперервних систем мають істотну залежність від початкових даних. Це означає, що неістотно малі відмінності в початковому стані швидко збільшуються в процесі еволюції і стають істотними для скінчених моментів t . Прикладом такої системи є атмосфера. Практична неможливість задати стан неперервної системи абсолютно точно призводить до принципової неможливості детерміністичного прогнозу в системах з істотною залежністю від початкових даних.

У так званих статистичних системах, котрі складаються з дуже великої кількості взаємодіючих субодиниць, всі перераховані причини стохастичності можуть бути присутні одночасно. До статистичних систем належить більшість фізичних та хімічних систем, — таких, як гази, рідини, тверді тіла, взаємодіючі хімічні речовини. Системи, в яких задіяно значну кількість живих об'єктів, наприклад, колонії бактерій, популяції комах, тварин, також є статистичними і часто не допускають детерміністичного прогнозу.

Процеси, які відбуваються в людському суспільстві, також не завжди допускають детерміністичний прогноз. Прикладом слугує події на фінансових біржах.

1.2 Стохастичні процеси

Найкращий спосіб з'ясувати, на якій станції буде поїзд у певний момент часу t , — знаходитися в ньому в цей момент і прочитати вивіску на станції. Аналогічно, найкращий спосіб з'ясувати, скільки очок буде на кубику після застосування вібрації протягом часу t , — це виконати сам експеримент. Але часто наше розв'язання того чи іншого питання в даний момент залежить від того, що за нашими уявленнями може трапитися в майбутньому. Наприклад, наше рішення виїхати на природу на декілька днів залежить від прогнозу погоди на ці дні. Для з'ясування того, де перебуватиме поїзд, ми звертаємося до розкладу. При цьому, за винятком нештатних ситуацій, нам гарантовано, що в певний момент поїзд перебуватиме на певній станції. В цьому сенсі розклад описує детерміністичний процес руху поїзда. Для процесів типу руху грального кубика на вібраторі поверхні неможливо наперед з'ясувати, в якому зі своїх детерміністичних станів він опиниться в момент t . Але в деяких випадках можна з'ясувати розподіл імовірності $p(n, t)$ знайти систему в якомусь з її детерміністичних станів. Зрозуміло, що розподіли в різні моменти часу можуть бути різними. Для набору l моментів часу $t' \leq t_1 < t_2 < \dots < t_l \leq t''$ можна також говорити про багаточасові розподіли ймовірності $p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l)$ того, що система перебуває в стані n_i в момент t_i , де $n_i \in \{0, 1, \dots, N\}$, $i = 1, \dots, l$. Якщо функції $p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l)$ визначено для всіх $l = 1, 2, \dots$ і для всіх можливих моментів часу t_1, t_2, \dots, t_l , то будемо говорити, що визначено стохастичний процес на відрізку часу $[t'; t'']$. Сукупність таких багаточасових розподілів, взятих як математична модель, називаємо стохастичним процесом на $[t'; t'']$.

Отже, розглядаючи стохастичний процес як математичну модель, ми маємо на увазі віображення процесу зміни з часом деякого стохастичного прогнозу щодо стану системи, а не фізичний процес, подібний до руху поїзда або кубика під дією вібрації². Ви-

²Цей підхід відрізняється від стандартного, коли випадковий процес ви-

сновки такого прогнозу щодо можливого стану фізичної системи є однозначними, але вони даються в термінах розподілів імовірності. Оскільки поняття ймовірності включає в себе багатократне повторення одного і того ж експерименту, то користь від стохастичного прогнозу можна очікувати лише при можливості його багатократного застосування в одних і тих же умовах.

Задати стохастичний процес можна по різному: явним виглядом багаточасових функцій розподілу $p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l)$, $n_i \in \{0, 1, \dots, N\}$, $t_i \in [t'; t'']$, $l = 1, 2, \dots$; диференціальним або інтегральним рівнянням, котре дозволяє обчислити функції розподілу; іншими співвідношеннями, які визначають $p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l)$. Зауважимо, що при цьому набір багаточасових функцій розподілу має задовольняти наступні умови узгодженості:

$$\sum_{0 \leq n \leq N} p(n_1, t_1; \dots; n, t; \dots; n_l, t_l) = p(n_1, t_1; \dots; n_l, t_l), \quad (1.3)$$

які випливають безпосередньо з означення багаточасових функцій розподілу.

Реалізації стохастичного процесу

Під реалізацією, або можливою траекторією, стохастичного процесу розуміється функція $n_t : [t'; t''] \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$, наявність якої означає, що в момент часу $t \in [t'; t'']$ фізична система перебуває в своему детерміністичному стані n_t . Зрозуміло, що для

значається як сукупність можливих траекторій системи з їхніми ймовірностями. При цьому математично різні стохастичні процеси можуть мати в деяких випадках одинакові набори багаточасових функцій розподілу. Випадки таких неоднозначностей пов'язані з континуальністю часової змінної (див. наприклад [2]) і можуть розглядатись як певного сорту сингулярності, малопікаві з практичної точки зору. Разом із тим, кінцевою метою опису фізичної системи за допомогою стохастичного процесу є обчислення середніх значень певних фізичних величин. Якщо обмежитись тільки такими фізичними величинами, середні від яких можуть бути обчислені за допомогою багаточасових функцій розподілу, то обидва підходи будуть еквівалентними з точки зору прогнозу, який вони дають.

даного стохастичного процесу існує багато реалізацій. Конкретна реалізація має менше значення, ніж набір багаточасових функцій розподілу, але вигляд реалізації може представляти пізнавальний інтерес. Крім того, достатньо довга реалізація може дати корисну статистичну інформацію про стохастичний процес у цілому. Отже, виникає питання побудови реалізації для стохастичного процесу, який визначено багаточасовими функціями розподілу. Зауважимо, що найпростіше реалізація може бути означена як таблична функція. В цьому випадку число моментів часу для яких значення n_t відомі — скінченне³. Отже, перш ніж шукати реалізацію, слід вибрати ті моменти часу, для яких вона буде відома, наприклад, $\{t_1, t_2, \dots, t_l\}$. Після цього слід взяти одночасову функцію розподілу $p(n, t_1)$ і використати цей розподіл для генерації випадкового числа $n_1 \in \{0, 1, \dots, N\}$ за допомогою комп'ютера⁴. Далі слід взяти двочасову функцію розподілу $p(n_1, t_1; n, t_2)$, в якій величини n_1, t_1, t_2 зафіксовано, і використати розподіл $p(n_1, t_1; n, t_2)/p(n_1, t_1)$ для генерації випадкового числа $n_2 \in \{0, 1, \dots, N\}$. Далі будеться наступний розподіл $p(n_1, t_1; n_2, t_2; n, t_3)/p(n_1, t_1; n_2, t_2)$ з фіксованими n_1, t_1, n_2, t_2, t_3 і генерується значення n_3 . Одержані таким чином пари $\{(t_1, n_1), (t_2, n_2), \dots, (t_l, n_l)\}$ і будуть таблицею конкретної реалізації, можливої траекторії стохастичного процесу. Для доведення слід пересвідчитись, що, коли утворити вказаним способом велику кількість траекторій для фіксованого набору моментів, то вони будуть розподілені за законом $p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l)$. Виберемо фіксований набір значень $\{k_1, k_2, \dots, k_l\}$ для змінних $\{n_1, n_2, \dots, n_l\}$ і знайдемо пропорцію, в якій зустрічається цей набір серед всіх утворених. Доля (пропорція) наборів, у яких перший елемент k_1 , — $p(k_1, t_1)$. Серед цих наборів доля наборів, у яких другий елемент — k_2 , буде $p(k_1, t_1; k_2, t_2)/p(k_1, t_1)$. Отже, доля наборів, у яких перші два елементи — k_1, k_2 , буде $p(k_1, t_1) \cdot p(k_1, t_1;$

³В деяких випадках реалізацію можна ефективно задати для всіх точок певного часового відрізку, див. Додаток А.2

⁴Програми на мові С для генерації випадкових чисел із заданим розподілом наведено в Додатку А.1.

$k_2, t_2)/p(k_1, t_1) = p(k_1, t_1; k_2, t_2)$, оскільки вважається, що випадкові числа, які генерує комп'ютер, — статистично незалежні. Міркуючи аналогічно, пересвідчуємося: доля наборів $\{k_1, k_2, \dots, k_l\}$ серед всіх утворених дається виразом $p(k_1, t_1; k_2, t_2; \dots; k_l, t_l)$, що і дає потрібний імовірнісний розподіл.

При цьому виникає питання, де взяти багаточасові функції розподілу. Для процесів загального типу задача опису всіх багаточасових функцій розподілу може виявитись занадто складною. Разом із тим для процесів, які задовольняють додаткові умови, багаточасові функції розподілу можна подати через більш прості функції, які залежать тільки від одного або двох моментів часу, як це зроблено в формулі (1.6) для марківського процесу. Явний вигляд цих більш простих функцій подано для конкретних систем в (1.95), (1.115), (1.116).

Якщо наявна інформація про фізичний механізм, який породжує стохастичний процес, то зразки траекторій цього процесу можна одержати також прямим чисельним моделюванням на основі відомої інформації. Для стохастичних процесів з дискретним набором станів можливо будувати реалізації не тільки як таблично задані функції, але і як функції, означені в будь-який момент часу з певного обмеженого інтервалу. Для пуассонівського процесу це зроблено в Додатку А.2, для процесу випадкових блукань — у Додатку А.3. Для процесів чисто стрибкового типу такі реалізації можна будувати і у випадку неперервної множини станів.

Можливо також діяти в протилежному напрямку — за відомими реалізаціями відтворити багаточасові розподіли. Наприклад, якщо є можливість багатократно повторити певний фізичний експеримент і зареєструвати значну кількість, M , траекторій реальної системи, то для знаходження, наприклад, $p(l, t_1; m, t_2)$, слід розділити кількість траекторій, які проходять через стан l в момент t_1 і через m в t_2 на M . Такий підхід більш ефективний для процесів без післядії, коли можна обмежитись двочасовими функціями розподілу.

1.2.1 Процеси без післядії

Розглянемо умовні розподіли ймовірності наступного вигляду

$$\begin{aligned} p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l | m_1, \tau_1; \dots; m_k, \tau_k) = \\ p(n_1, t_1; \dots; n_l, t_l; m_1, \tau_1; \dots; m_k, \tau_k) / p(m_1, \tau_1; \dots; m_k, \tau_k) \quad (1.4) \\ n_i, m_i \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad l, k = 1, 2, \dots, \\ t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_l \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_k. \end{aligned}$$

Функція $p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l | m_1, \tau_1; m_2, \tau_2; \dots; m_k, \tau_k)$ дає ймовірність того, що система перебуває в станах n_1, n_2, \dots, n_l в моменти t_1, t_2, \dots, t_l при умові, що вона була в станах m_1, m_2, \dots, m_k в моменти $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$.

Для стохастичного процесу без післядії, або марківського, виконується наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l | m_1, \tau_1; m_2, \tau_2; \dots; m_k, \tau_k) = \\ p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l | m_1, \tau_1). \quad (1.5) \end{aligned}$$

Отже, для марківських процесів умовний розподіл імовірності визначається найбільш пізньою умовою, m_1, τ_1 , і не залежить від того, що відбувалось із системою в більш ранні моменти часу τ_2, \dots, τ_k . Якщо співвідношення (1.5) не виконується, то стохастичний процес називається немарківським⁵.

⁵ Якщо стан у момент t не вичерпує можливі очікування для $t' > t$, і відомості про систему в більш ранні моменти можуть вплинути на ці очікування, то це можна трактувати як вказівку на те, що метод опису стану системи (набір параметрів, зовнішні впливи та ін.) не є повним. Приймаючи цю точку зору, будемо називати набір параметрів, відображені у моделі системи, її відкритим станом. Якщо існує інформація, одержана з більш ранніх відкритих станів ($t'' < t$), котра може вплинути на прогноз стосовно більш пізніх ($t' > t$) відкритих станів, то вона або присутня в відкритому стані системи в момент t , або ні. Якщо вона присутня, то знання більш раннього відкритого стану не додасть нічого до прогнозу при правильному використанні того, що відомо в момент t . Це буде марківський процес. Якщо вона відсутня в відкритому стані в момент t , то вона повинна існувати десь за межами набору параметрів, обраних в якості означення стану. Таким чи-

Процес називається стаціонарним, якщо для нього властиве таке співвідношення:

$$p(n_1, t_1+s; n_2, t_2+s; \dots; n_l, t_l+s) = p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l), \quad s \geq 0.$$

1.2.2 Перехідні ймовірності

Співвідношення (1.4), (1.5) дозволяють обчислити багаточасові розподіли ймовірності марківського процесу за наступними формулами:

$$\begin{aligned} p(n_1, t_1; n_2, t_2) &= p(n_1, t_1 | n_2, t_2)p(n_2, t_2), \\ p(n_1, t_1; n_2, t_2; n_3, t_3) &= p(n_1, t_1 | n_2, t_2)p(n_2, t_2 | n_3, t_3)p(n_3, t_3), \\ &\dots \\ p(n_1, t_1; n_2, t_2; \dots; n_l, t_l) &= \\ p(n_1, t_1 | n_2, t_2)p(n_2, t_2 | n_3, t_3) \cdots p(n_{l-1}, t_{l-1} | n_l, t_l)p(n_l, t_l). \end{aligned} \tag{1.6}$$

ном, якщо марківські процеси служать моделями ситуацій, коли структура системи відома повністю, але початкові умови не визначено точно і закон руху випадковий, то немарківські процеси описують динаміку систем, структура яких відома не повністю або не повністю врахована в моделі. В той же час, ймовірнісний характер динаміки теж можна трактувати як наслідок недовідного знання структури динамічної системи. Адекватність марківського опису означає, що ефектами пам'яті в частині системи, котра не описана відкритим станом (моделлю), можна знехтувати. Однією з підстав для такого нехтування може бути те, що приховано частина не має пам'яті в тому сенсі, що її стан (розподіл ймовірності) визначається одночасним з нею відкритим станом (моделлю). Тоді параметрів моделі (відкритого стану) буде досить, щоб описати вплив прихованої частини на динаміку відкритого стану. Якщо ж приховано частина має змістовну самостійну динаміку, то знання відкритого стану в серії більш ранніх моментів може змінити прогноз, оскільки таке знання може зменшити невизначеність стану прихованої частини системи (як приклад див. п. 2.5). При такій точці зору відшукання простих динамічних законів для систем, описаних немарківськими процесами, неможливе. З фізичної точки зору це пояснюється тим, що значна частина системи, яка має самостійну динаміку, залишається за межами причинно-наслідкового опису. Математично такі закони мають формулюватися в термінах багаточасових перехідних імовірностей, отже, не можуть бути простими.

Умову стаціонарності марківського процесу можна подати в термінах одночасових розподілів імовірностей $p(n, t)$ і функцій $p(n, t | n', t')$. А саме, перші мають бути незалежними від часу, а другі залежати від різниці між кінцевим і початковим моментами:

$$p(n, t) = p(n), \quad p(n, t + s | n', t' + s) = p(n, t | n', t'). \quad (1.7)$$

Якщо має місце стаціональність, то в більшості випадків можна вважати, що динаміка системи, яку описує процес, розпочинається в момент $t = 0$. Якщо виконується тільки друга з умов (1.7), то процес називається однорідним марківським процесом. Якщо початковий стан системи визначено розподілом ймовірності $p(n, 0)$, то розподіл в момент t обчислюється за формулою:

$$p(n, t) = \sum_{0 \leq k \leq N} p(n, t | k, 0)p(k, 0). \quad (1.8)$$

Зокрема, якщо точно відомо, що система при $t = 0$ перебувала в стані l , то (1.8) дає:

$$p(n, t) = p(n, t | l, 0). \quad (1.9)$$

Звідси, зокрема, випливає:

$$\boxed{p(n, 0 | l, 0) = \delta_{nl}, \quad n, l \in \{0, 1, \dots, N\}}, \quad (1.10)$$

а також, врахувавши (1.2),

$$\boxed{\sum_{0 \leq n \leq N} p(n, t | l, 0) = 1.} \quad (1.11)$$

З формул (1.6), (1.8), (1.9) виходить, що набір умовних розподілів ймовірності

$$p(n, t | l, 0), \quad n, l \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad t \geq 0 \quad (1.12)$$

разом із початковим розподілом $p(n, 0)$ повністю визначає марківський стохастичний процес. Функції (1.12) називаються передхідними ймовірностями.

Крім початкових умов (1.10) і умов нормування (1.11) перехідні ймовірності задовольняють рівняння Чепмена-Колмогорова:

$$p(n_1, t_1 | n_2, t_2) = \sum_{0 \leq n \leq N} p(n_1, t_1 | n, t)p(n, t | n_2, t_2), \quad (1.13)$$

де $t_2 \leq t \leq t_1$, котре є наслідком умов узгодженості (1.3) і співвідношень (1.6).

Перехідні ймовірності несуть в собі всю інформацію про динаміку системи в часі, але позбавлені впливу невизначеності стану системи в початковий момент. Фактично набір (1.12) описує динаміку для будь-яких початкових умов, якщо взяти до уваги формулу (1.8). В цьому сенсі можна стверджувати, що набір (1.12) вичерпує всю інформацію про фізичну систему⁶, якщо вона моделюється стохастичним процесом, і є еквівалентним фізичній системі в рамках стохастичного опису. З іншого боку, форма рівняння Чепмена-Колмогорова (1.13) не містить ознак конкретної фізичної системи. Так сталося тому, що рівняння (1.13) є наслідком не фізичної суті системи, а вибраного методу описання її еволюції як стохастичного процесу. Тим не менше, з допомогою рівняння (1.13) можна вивести рівняння, в яких в явному вигляді присутні ознаки конкретної фізичної системи (див. (1.15), (1.16), (1.49), (1.50)).

1.3 Диференціальні рівняння

Для одержання з рівняння Чепмена-Колмогорова (1.13) балансного і зворотного балансного рівняння⁷ зробимо наступне припущення:

$$p(n, t + dt | k, t) = r(n | k)dt + o(dt), \quad n \neq k. \quad (1.14)$$

⁶за винятком її початкового стану

⁷В англомовній літературі вживаються назви “Master equation” та “backward Master equation”.

Числа $r(n | k)$ називаються швидкостями переходів. Саме швидкості переходів і несуть у собі ознаки конкретної фізичної системи. Очевидно,

$$r(n | k) \geq 0, \quad n, k \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad n \neq k.$$

Припущення (1.14) є цілком природним в тому сенсі, що чим довше ми чекаємо, тим більша ймовірність того, що система змінить свій стан. Математично умова (1.14) еквівалентна існуванню правої похідної по t у функції $p(n, t | k, 0)$ в точці $t = 0$. З (1.11) і (1.14) випливає наступне:

$$p(k, t + dt | k, t) = 1 - \sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ n \neq k}} r(n | k)dt + o(dt).$$

1.3.1 Балансне рівняння

Для виведення балансного рівняння скористаємося рівнянням (1.13) для моментів часу t' , t , і $t + dt$:

$$\begin{array}{c} p(n, t | n', t') \\ p(k, t | n', t') \\ \hline t' \qquad \qquad \qquad t \qquad \qquad \qquad t + dt \end{array}$$

Мал. 1.3. До виведення балансного рівняння

$$p(n, t + dt | n', t') = \sum_{0 \leq k \leq N} p(n, t + dt | k, t)p(k, t | n', t').$$

Припущення (1.14) дозволяє переписати останнє в наступному

ВИГЛЯДІ:

$$\begin{aligned}
 p(n, t + dt \mid n', t') = & \\
 = & \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n}} (r(n \mid k)dt + o(dt))p(k, t \mid n', t') + \\
 & + \left(1 - \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n}} (r(k \mid n)dt + o(dt)) \right) p(n, t \mid n', t').
 \end{aligned}$$

Віднявши звідси $p(n, t \mid n', t')$, розділивши на dt і виконавши граничний перехід $dt \rightarrow 0$, одержимо балансне рівняння:

$$\boxed{\frac{dp(n, t \mid n', t')}{dt} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n}} (r(n \mid k)p(k, t \mid n', t') - r(k \mid n)p(n, t \mid n', t'))} \quad (1.15)$$

Ця система рівнянь розпадається на $N+1$ не зв'язаних між собою підсистем, індексованих числом n' . Рівняння (1.15) справедливе для будь-якого графа переходів. Відсутність на графі переходу $n \rightarrow k$ відображається умовою $r(k \mid n) = 0$ і відсутністю відповідного доданка в (1.15). Зокрема, для лінійного графа при $N > 1$

$$|k - l| > 1 \Rightarrow r(k \mid l) = r(l \mid k) = 0.$$

В результаті балансне рівняння для лінійного графа переходів має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}p(n, t \mid n', t') = & -(r_n^- + r_n^+)p(n, t \mid n', t') + \\
 & + r_{n+1}^-p(n+1, t \mid n', t') + r_{n-1}^+p(n-1, t \mid n', t'), \quad (1.16) \\
 & n, n' \in \{0, 1, \dots, N\}, \\
 & p(-1, t \mid n', t') \equiv 0, \quad p(N+1, t \mid n', t') \equiv 0,
 \end{aligned}$$

де позначено:

$$r_k^+ \equiv r(k+1 \mid k), \quad r_k^- \equiv r(k-1 \mid k), \quad k \in \{0, \dots, N\},$$

причому $r_0^- \equiv 0$, $r_N^+ \equiv 0$.

1.3.2 Поведінка розв'язків балансного рівняння

Рівняння (1.15) можуть служити для знаходження всіх перехідних імовірностей. Оскільки розглядаються тільки стаціонарні процеси, то $p(n, t | n', t') = p(n, t - t' | n', 0)$, і можна обмежитись функціями з $t' = 0$: $p(n, t | n', 0)$. Для знаходження набору $N+1$ функцій $p(n, t | n', 0)$, де n' — фіксоване, а n пробігає набір значень $0, 1, \dots, N$ слід розв'язати рівняння (1.15) з початковою умовою

$$\{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}. \quad (1.17)$$

Тут у позиції з номером n' — одиниця, на всіх інших місцях — нуль, див. (1.10). Рівняння (1.15) можна розглядати для будь-яких початкових умов. Зокрема, якщо в якості набору початкових значень взяти розподіл імовірностей

$$\{P_0, P_1, \dots, P_N\}, \quad \text{де} \quad \sum_{0 \leq k \leq N} P_k = 1, \quad \text{i} \quad P_k \geq 0 \text{ для всіх } k, \quad (1.18)$$

то розв'язок системи рівнянь (1.15), з огляду на (1.8), дає розподіл імовірностей у відповідний момент. Враховуючи це, а також лінійність системи рівнянь (1.15) і той факт, що розв'язок для початкової умови типу (1.17) набуває вигляду (1.18) з усіма компонентами, строго позитивними, як тільки еволюція розпочинається (див. (1.30), нижче), приходимо до висновку, що поведінку розв'язків доцільно досліджувати для будь-яких початкових умов.

Існування і єдиність розв'язків

Введемо наступні позначення:

$$p(n, t | n', 0) = P_n(t), \quad r(k | n) = r_{kn}, \quad s_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n}} r_{kn}. \quad (1.19)$$

Якщо ввести матрицю \mathbf{A} зі сталими елементами наступного вигляду

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -s_0 & r_{01} & r_{02} & \dots & r_{0,N-1} & r_{0N} \\ r_{10} & -s_1 & r_{12} & \dots & r_{1,N-1} & r_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{N-1,0} & r_{N-1,1} & r_{N-1,2} & \dots & -s_{N-1} & r_{N-1,N} \\ r_{N,0} & r_{N,1} & r_{N,2} & \dots & r_{N,N-1} & -s_N \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

то систему (1.15) можна записати в вигляді одного матричного рівняння наступного вигляду:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{AX}(t), \quad (1.21)$$

де \mathbf{X} позначає $N + 1$ -вимірний вектор

$$\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \dots, X_N\} \in R^{N+1}.$$

Система звичайних диференціальних рівнянь — (1.15) або (1.21) — зі сталими коефіцієнтами задовільняє умови існування і єдиності розв'язку [3] для всіх $t \geq 0$ і для будь-якого набору початкових даних $\mathbf{X}(0) \in R^{N+1}$, де $\mathbf{X}(0) = \{X_0(0), X_1(0), \dots, X_N(0)\}$. Отже, розв'язки (1.15) або (1.21) існують і є єдині. Крім того, розв'язки залежать неперервним чином від початкових даних. Отже, система рівнянь (1.21) визначає еволюційну напівгрупу $\mathbf{S}(t)$ в просторі R^{N+1} . Це означає, що розв'язок $\mathbf{X}(t)$ системи рівнянь (1.21) одержується з початкових умов за допомогою залежної від часу матриці (оператора еволюції) $\mathbf{S}(t)$ за формулою

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{X}(0), \quad (1.22)$$

причому $\mathbf{S}(t)$ задовільняє напівгрупову властивість

$$\mathbf{S}(t + \tau) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(\tau), \quad t, \tau \geq 0.$$

Явний вигляд оператора еволюції дається формулою

$$S(t) = \exp(tA), \quad (1.23)$$

де A задано формулою (1.20), а експонента в (1.23) може розумітись як ряд по ступенях tA , причому (1.23) визначає неперервний оператор в топології будь-якої норми в R^{N+1} . Формула (1.22) визначає для кожного початкового розподілу $X(0)$ траекторію $X(t)$ в просторі R^{N+1} :

$$X(t) = \exp(tA)X(0). \quad (1.24)$$

Детальний опис матричної експоненти (1.23) можна знайти в [5, розд. 10, §6, розд. 11, §11].

Збереження позитивності

Позначимо множину векторів в R^{N+1} , які мають невід'ємні координати, через R_+^{N+1} . Саме до цієї множини мають належати початкові дані для системи (1.21). Доведемо, що розв'язок системи (1.21) також належить до R_+^{N+1} в будь-який момент часу. Множина R_+^{N+1} має границю в R^{N+1} , котра складається з N -вимірних граней Γ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, які визначаються наступними умовами:

$$\Gamma_k = \left\{ X \mid X \in R_+^{N+1} \wedge X_k = 0 \right\}. \quad (1.25)$$

Ми доведемо, що не існує траекторій, які перетинають грані з середини R_+^{N+1} назовні. Грань Γ_k має вектор нормалі, спрямований у середину R_+^{N+1} , такого вигляду:

$$n_k = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}, \quad (1.26)$$

де одиниця стоїть на k -тому місці, а всі інші компоненти — нулі. За допомогою системи (1.21) або формул (1.24) і (1.20) можна знайти приріст $dX(t)$ розв'язку $X(t)$ порядку dt , який відповідає нескінченно малому приросту часу $dt > 0$:

$$dX(t) = AX(t)dt.$$

Якщо точка $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}$ знаходиться на грані Γ_k , то напрям цього приросту показує напрям, в якому точка \mathbf{X} покидає грань Γ_k в процесі еволюції. Для з'ясування того, в середину чи назовні R_+^{N+1} напрямлений приріст, досить знайти знак його скалярного добутку з вектором \mathbf{n}_k . Згідно з (1.20), (1.25), (1.26), якщо $\mathbf{X} \in \Gamma_k$, то скалярний добуток має наступний вигляд:

$$(\mathbf{n}_k, \mathbf{A}\mathbf{X}dt) \equiv \mathbf{n}_k^T \mathbf{A}\mathbf{X}dt = \sum_{0 \leq l \leq N, l \neq k} r_{kl} X_l dt \geq 0, \quad (1.27)$$

оскільки на гранях R_+^{N+1} $X_i \geq 0$ для всіх i . Тут \mathbf{n}_k^T означає транспонований вектор (однорядкову матрицю) до вектора \mathbf{n}_k . З (1.27) виходить, що траекторії, яка перетинає границю множини R_+^{N+1} зсередини назовні, не існує. Отже, якщо початковий стан $\mathbf{X}(0) \in R_+^{N+1}$, то для всіх $t > 0$ також $\mathbf{X}(t) \in R_+^{N+1}$. Останнє твердження можна подати у вигляді

$$\mathbf{S}(t)R_+^{N+1} \subseteq R_+^{N+1}. \quad (1.28)$$

Припустімо тепер, що можливі переходи в обидва боки між будь-якими двома станами:

$$r_{kl} > 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (1.29)$$

В цьому випадку рівність в (1.27) можлива лише для нульового вектора \mathbf{X} . Отже, всі траекторії покидають грані множини R_+^{N+1} всередину. Зокрема, траекторій, які залишаються на границі множини R_+^{N+1} протягом скінченного часу, не існує. Останнє означає: якщо початковий набір $\mathbf{X}(0)$ має як позитивні так і нульові компоненти, то відповідний розв'язок $\mathbf{X}(t)$ має виключно позитивні компоненти для всіх $t > 0$. Останнє твердження можна подати у вигляді

$$\mathbf{S}(t)R_+^{N+1} \subseteq R_{++}^{N+1}, \quad t > 0 \quad (1.30)$$

де $R_{++}^{N+1} = \{\mathbf{X} \mid \bigwedge_{0 \leq n' \leq N} X_n > 0\} \cup \{\mathbf{0}\}$, де $\mathbf{0} = \{0, \dots, 0\}$. Висновок (1.30) справедливий не тільки тоді, коли можливі переходи

з будь-якого стану в будь-який інший (умова (1.29)). Припустімо наприклад, що всі швидкості переходів між сусідніми станами лінійного графу відмінні від нуля:

$$r_k^+ > 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad r_k^- > 0, \quad k \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.31)$$

Для такого графу матриця \mathbf{A} має наступний вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -r_0^+ & r_1^- & \dots & 0 & 0 \\ r_0^+ & -s_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_1^+ & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -s_{N-1} & r_N^- \\ 0 & 0 & \dots & r_{N-1}^+ & -r_N^- \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

і замість (1.27) одержуємо наступне:

$$(\mathbf{n}_k, \mathbf{AX}) \equiv \mathbf{n}_k^T \mathbf{AX} = r_{k-1}^+ X_{k-1} + r_{k+1}^- X_{k+1} \geq 0. \quad (1.33)$$

Рівність в (1.33) може бути тільки тоді, коли точка \mathbf{X} належить перетину граней $\Gamma_{k-1}, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$. В цьому випадку приріст у точці \mathbf{X} порядку dt напрямлений уздовж грані Γ_k , і для з'ясування напрямку, в якому траекторія покидає грань Γ_k , слід розглянути приріст порядку dt^2 :

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{X} dt^2 / 2!, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{k-1} \cap \Gamma_k \cap \Gamma_{k+1}.$$

Це дає можливість для оцінки знаку скалярного добутку:

$$(\mathbf{n}_k, \mathbf{A}^2 \mathbf{X}) = r_{k-1}^+ r_{k-2}^+ X_{k-2} + r_{k+1}^- r_{k+2}^- X_{k+2}. \quad (1.34)$$

Останній вираз або позитивний, або, якщо $\mathbf{X} \in \Gamma_{k-2} \cap \Gamma_{k-1} \cap \Gamma_k \cap \Gamma_{k+1} \cap \Gamma_{k+2}$, обертається в нуль. В останньому випадку слід

розглядати приріст порядку dt^3 . Оскільки число компонент вектора \mathbf{X} обмежене числом $N + 1$, то, розглянувши приrostи порядку не вище від N , ми прийдемо до висновку, що або $\mathbf{X} \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \dots \cap \Gamma_N$, і тоді $\mathbf{X} = 0$ і повний приріст — нульовий, або приріст якогось порядку буде складати гострий кут з вектором \mathbf{n}_k , а всі приrostи нижчих порядків будуть перпендикулярними до \mathbf{n}_k . Це означає, що траекторії, котрі дотикаються границі R_+^{N+1} , також покидають її в середину R_+^{N+1} . Використовуючи аналогічні міркування, можна довести, що висновок (1.30) справедливий для систем із загальним графом переходів при умові, що з будь-якої вершини графу можна пройти в будь-яку іншу вершину вздовж стрілок графа.

Збереження повної ймовірності

Нехай $\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \dots, X_N\} \in R^{N+1}$ — деякий вектор із R^{N+1} . Позначимо через $\overline{\mathbf{X}}$ суму всіх його компонент:

$$\overline{\mathbf{X}} = \sum_{0 \leq k \leq N} X_k.$$

Рівняння для $\overline{\mathbf{X}}$ одержується з (1.21) додаванням всіх рівнянь системи:

$$\frac{d}{dt} \overline{\mathbf{X}} = 0.$$

Отже, $\overline{\mathbf{X}}$ не залежить від часу. Якщо вектор \mathbf{X} має всі координати невід'ємні, причому $\overline{\mathbf{X}} = 1$, то його координати можна розглядати як деякий розподіл імовірностей на множині станів. Сталість $\overline{\mathbf{X}}$ означає, що сума імовірностей знайти систему в будь-якому зі станів $0, 1, \dots, N$ не залежить від часу, отже повна ймовірність зберігається.

1.3.3 Асимптотична поведінка розв'язків

Поведінка розв'язку системи (1.21) при $t \rightarrow \infty$ визначається початковим вектором і спектром матриці \mathbf{A} .

Обмеженість

Зокрема, якби серед власних чисел \mathbf{A} знайшлось λ таке, що його дійсна частина $\Re \lambda = \lambda' > 0$, то можна було б так вибрати початкову умову:

$$\max_i |(\exp(t\mathbf{A})\mathbf{X})_i| > e^{t\lambda'}, \quad t > 0. \quad (1.35)$$

Останнє неможливе внаслідок п.1.3.2. Дійсно, подамо довільний початковий вектор $\mathbf{X}(0)$ у наступному вигляді:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^+(0) - \mathbf{X}^-(0), \quad (1.36)$$

де кожен з векторів $\mathbf{X}^+(0)$, $\mathbf{X}^-(0)$ має невід'ємні координати. Розв'язок тоді подається в вигляді різниці

$$\mathbf{X}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{X}^+(0) - \exp(t\mathbf{A})\mathbf{X}^-(0).$$

Завдяки п.1.3.2, маємо оцінки

$$\max_i ((\exp(t\mathbf{A})\mathbf{X}^\pm(0))_i) \leq \overline{\mathbf{X}^\pm}(0), \quad t > 0, \quad (1.37)$$

звідки виходить, що (1.35) неможливе. З (1.37) випливає, що розв'язок $\mathbf{X}(t)$ рівняння (1.21) для будь-якого початкового вектора $\mathbf{X}(0)$ задовільняє умову

$$\sup_{t>0} \max_i |(\exp(t\mathbf{A})\mathbf{X})_i| < \infty. \quad (1.38)$$

З останнього, зокрема, виходить, що всі власні числа матриці \mathbf{A} мають недодатні дійсні частини. З (1.38) також випливає, що в нормальній жордановій формі⁸ матриці \mathbf{A} клітки, що відповідають власним значенням із нульовою дійсною частиною, мають розмір 1×1 . Дійсно, якщо в \mathbf{A} присутня клітка $n \times n$ з $\Re(\lambda) = 0$, то можна так вибрати початковий вектор, що розв'язок буде зростати як t^{n-1} (див. [5, розд.11, §11]), звідки, враховуючи (1.38), виходить: $n = 1$.

⁸З приводу нормальної жорданової форми матриці див.[4, 5].

Інваріантний стан

Додавши до рядка з будь-яким номером n всі інші рядки матриці \mathbf{A} , отримаємо нульовий рядок. Звідси випливає, що $\lambda = 0$ — власне значення \mathbf{A} . Відповідний йому власний вектор \mathbf{P} буде інваріантним:

$$\exp(t\mathbf{A})\mathbf{P} = \mathbf{P}.$$

Припустімо, що в деякому рядку з номером n матриці \mathbf{A} нема нульових елементів⁹. Тоді, викресливши рядок і стовпчик із номером n , одержимо матрицю \mathbf{B} розмірності N , яка має ранг N . Дійсно, матриця \mathbf{B} задовільняє умови

$$\mathbf{B}_{i,j} \geq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{0 \leq j \leq N-1} \mathbf{B}_{i,j} < 0,$$

з яких виходить, що всі власні числа матриці \mathbf{B} мають від'ємні дійсні частини [10, п.3.3.1]. Отже, ранг матриці \mathbf{B} дорівнює N , звідки випливає, що кратність нульового власного значення у матриці \mathbf{A} — одиниця. Таким чином, інваріантний стан — єдиний.

Це доведення єдності інваріантного стану не підходить для систем із лінійним графом, оскільки для таких систем будь-який рядок матриці \mathbf{A} містить не більше трьох відмінних від нуля елементів. Але для таких систем інваріантний вектор \mathbf{P} можна обчислити в явному вигляді. Дійсно, визначивши в рівняннях (1.16) ліві частини рівними нулю, а $P_0 \equiv p(0, t \mid n', 0) = p$, маємо з рівняння (1.16) при $n = 0$

$$P_1 = \frac{r_0^+}{r_1^-} p. \quad (1.39)$$

При $n > 0$ маемо рекурентне спiввiдношення:

$$P_{n+1} = \frac{r_n^- + r_n^+}{r_{n+1}^-} P_n - \frac{r_{n-1}^+}{r_{n+1}^-} P_{n-1}. \quad (1.40)$$

⁹Отже, існує стан, з якого можливий безпосередній перехід у будь-який інший стан.

Нарешті, при $n = N - 1$ і $n = N$ маємо:

$$P_N = \frac{r_{N-1}^- + r_{N-1}^+}{r_N^-} P_{N-1} - \frac{r_{N-2}^+}{r_N^-} P_{N-2}, \quad P_N = \frac{r_{N-1}^+}{r_N^-} P_{N-1}. \quad (1.41)$$

Формули (1.39)-(1.41) однозначно визначають власний вектор \mathbf{P} , який відповідає нульовому власному значенню, якщо два вирази (1.41) не суперечать один одному. В останньому можна пересвідчитись шляхом підстановки наступного явного розв'язку

$$P_n = \prod_{0 \leq k \leq n-1} \frac{r_k^+}{r_{k+1}^-} P_0, \quad n = 1, \dots, N \quad (1.42)$$

в (1.39)-(1.41). Доведені твердження приводять до висновку: у матриці \mathbf{A} системи з лінійним графом переходів нульове власне значення також однократне.

Зауважимо, що в інваріантному стані (1.42) має місце детальний баланс:

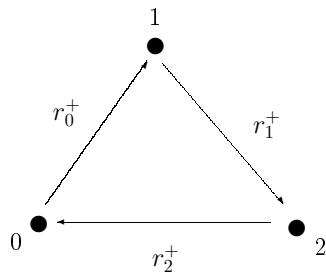
$$r_n^+ P_n = r_{n+1}^- P_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.43)$$

тобто потоки ймовірності між сусідніми станами точно врівноважуються. Останнє не справджується для інваріантного стану системи з загальним графом переходів. Дійсно, розглянемо, наприклад, систему з $N = 2$, граф переходів якої зображенено на мал. 1.4. Матриця \mathbf{A} для такої системи має наступний вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -r_0^+ & 0 & r_2^+ \\ r_0^+ & -r_1^+ & 0 \\ 0 & r_1^+ & -r_2^+ \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Безпосереднім обчисленням пересвідчуємося, що ця матриця має два від'ємних і однократне нульове власні значення. Відповідний інваріантний відносно еволюції вектор має наступні координати:

$$P_0, \quad P_1 = \frac{r_0^+}{r_1^+} P_0, \quad P_2 = \frac{r_0^+}{r_2^+} P_0.$$



Мал. 1.4. Система без детального балансу

Співвідношення (1.43) для нього не виконується.

Різниця між лінійною і розглянутою трикутною системами в стані рівноваги (інваріантному стані) проявиться, якщо розірвати зв'язок між двома сусідніми станами. Для лінійної системи стан залишиться інваріантним, а для розглянутої трикутної почнеться перерозподіл, у результаті якого вся ймовірність зосередиться в одному зі станів.

Зауважимо, що відображення $\exp(t\mathbf{A})$ при кожному $t \in \mathbb{R}$ неперервним в \mathbb{R}^{N+1} і, завдяки п.1.3.2, переводить компактну множину K

$$K = \{\mathbf{X} \mid X_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad \wedge \quad \sum_{0 \leq i \leq N} X_i = 1\}$$

в себе. Множина K гомеоморфна замкнутій кулі в \mathbb{R}^N . Отже, за теоремою Брауера (див. [11, § 0.5]), $\exp(t\mathbf{A})$ має інваріантний вектор в K . Таким чином, власний вектор матриці \mathbf{A} , який відповідає нульовому власному значенню, має всі координати позитивними (одного знаку). Для лінійного графу переходів це видно також із формул (1.42).

Збіжність до інваріантного стану

Як установлено вище, матриця \mathbf{A} має однократне нульове власне

значення і не має власних значень всередині правої комплексної півплощини. Останнє твердження не виключає наявності чисто уявних власних значень і, як наслідок, періодичних розв'язків. Отже, будь-який розв'язок $\exp(t\mathbf{A})\mathbf{X}$ системи (1.21) може збігатись або до інваріантного стану, або до нуля, або до періодичного розв'язку. Доведемо, що періодичних розв'язків не існує. Припустімо, що розв'язок $\mathbf{X}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{X}(0)$ — періодичний, \mathbf{P} — інваріантний. Введемо число β наступним чином:

$$\beta = \inf_{t>0} \min_i X_i(t).$$

Число β існує завдяки періодичності $\mathbf{X}(t)$. Оскільки всі координати інваріантного вектора додатні і $\beta < \infty$, то можна вибрати число α так, що буде справедливою рівність

$$\inf_{t>0} \min_i (\alpha P_i + X_i(t)) = 0.$$

З останнього випливає, що періодичний розв'язок $\alpha \mathbf{P} + \mathbf{X}(t) \in R_+^{N+1}$ повинен повернутись на грань множини R_+^{N+1} , що неможливо в силу п.1.3.2. Отже, система (1.21) не має періодичних розв'язків.

Зауваження. Доведені в розд.1.3.2 твердження дозволяють зробити висновки про спектральні властивості матриць певного типу. Нехай матриця $N \times N$ \mathbf{M} задовільняє наступні дві умови:

$$\bigwedge_{1 \leq k \leq N} \sum_{1 \leq i \leq N} M_{ki} = 0, \quad (1.45)$$

$$\bigwedge_{i \neq j} M_{ij} \geq 0. \quad (1.46)$$

Тоді, якщо у \mathbf{M} хоча б один рядок не містить нулів, зокрема, якщо всі недіагональні елементи позитивні, то нульове власне значення матриці \mathbf{M} — однократне. Відповідний власний вектор має всі координати додатні. Всі інші власні числа мають від'ємні дійсні частини. Підсилення цього твердження на основі сказаного на с.26 дозволяє замінити умову (1.45) наступною: для будь-яких $0 \leq i, j \leq N$ існує набір елементів матриці M такий, що $M_{ik} M_{kl} \dots M_{hn} M_{nj} > 0$.

Зі сказаного вище в цьому підрозділі виходить, що будь-який початковий вектор \mathbf{X} в процесі еволюції буде збігатися до інваріантного вектора або до нуля, якщо $\overline{\mathbf{X}} = 0$.

1.3.4 Зворотне балансне рівняння

Для виведення зворотного балансного рівняння скористаємося рівнянням (1.13) (див. Мал.1.5) для моментів часу t' , $t' + dt$, і t :

$$\begin{array}{ccc} n' & n' & p(n, t|n', t') \\ | & | & p(n, t|n', t' + dt) \\ \hline t' & t' + dt & t \end{array}$$

Мал. 1.5. До виведення зворотного балансного рівняння

$$p(n, t | n', t') = \sum_{0 \leq k \leq N} p(n, t | k, t' + dt)p(k, t' + dt | n't'). \quad (1.47)$$

Умову нормованості (1.11) запишемо так:

$$1 = \sum_{0 \leq k \leq N} p(k, t' + dt | n't').$$

Домноживши останнє на $p(n, t | n', t' + dt)$, одержимо:

$$p(n, t | n', t' + dt) = \sum_{0 \leq k \leq N} p(n, t | n', t' + dt)p(k, t' + dt | n't'). \quad (1.48)$$

Віднявши (1.47) від (1.48), одержимо:

$$\begin{aligned} p(n, t | n', t' + dt) - p(n, t | n', t') = \\ \sum_{0 \leq k \leq N} p(k, t' + dt | n't')(p(n, t | n', t' + dt) - p(n, t | k, t' + dt)) = \\ \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n'}} (r(k | n')dt + o(dt))(p(n, t | n', t' + dt) - p(n, t | k, t' + dt)). \end{aligned}$$

Розділивши останнє на dt і виконавши граничний перехід $dt \rightarrow 0$, одержимо зворотне балансне рівняння:

$$\boxed{\frac{d}{dt'} p(n, t | n', t') = \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n'}} r(k | n')(p(n, t | n', t') - p(n, t | k, t')).} \quad (1.49)$$

Рівняння (1.49) також зберігає повну ймовірність:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \sum_{0 \leq n \leq N} p(n, t | n', t') &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n'}} r(k | n') \sum_{0 \leq n \leq N} p(n, t | n', t') - \\ &- \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \neq n'}} r(k | n') \sum_{0 \leq n \leq N} p(n, t | k, t') = 0, \end{aligned}$$

оскільки кожна з двох сум по n дорівнює одиниці в силу умов нормування.

Для лінійного графа переходів відмінні від нуля швидкості переходів — це $r(n' - 1 | n')$ і $r(n' + 1 | n')$. В результаті для лінійного графа зворотне балансне рівняння має в позначеннях (1.19) такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} p(n, t | n', t') &= \\ &= r_{n'}^-(p(n, t | n', t') - p(n, t | n' - 1, t')) + \quad (1.50) \\ &+ r_{n'}^+(p(n, t | n', t') - p(n, t | n' + 1, t')), \\ &n, n' \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad r_0^- = 0, \quad r_N^+ = 0. \end{aligned}$$

1.3.5 Балансні рівняння для системи зі стоком

Розглянемо систему з набором елементарних станів $\{0, 1, \dots, N, N+1\}$, яка має лінійний граф переходів, зображений на мал. 1.6. Для такої системи $r_{N+1}^- = 0$, $r_N^+ > 0$. Балансне рівняння для такої

Мал. 1.6. Граф переходів для поглинання в стані $N + 1$

системи має в позначеннях (1.19) наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -r_0^+ P_0(t) + r_1^- P_1(t), \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_n(t) = & -s_n P_n(t) + r_{n+1}^- P_{n+1}(t) + \\ & + r_{n-1}^+ P_{n-1}(t), \quad n \in \{1, \dots, N-1\}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\frac{d}{dt}P_N(t) = -(r_N^- + r_N^+) P_N(t) + r_{N-1}^+ P_{N-1}(t), \quad (1.53)$$

$$\frac{d}{dt}P_{N+1}(t) = r_N^+ P_N(t). \quad (1.54)$$

В цій системі сукупність рівнянь (1.51)-(1.53) не містить функції $P_{N+1}(t)$. Отже, система рівнянь (1.51)-(1.53) може розглядатись як опис фізичної системи з набором $\{0, 1, \dots, N\}$ в якості множини елементарних станів. При цьому, якщо ймовірність знаходження в стані N не нульова, існує ймовірність безповоротно вийти за межі вказаного набору станів. Системи такого типу називаються системами зі стоком у стані N . Відволікаючись від інформації, куди відбувається сток, граф переходів системи зі стоком можна зобразити так, як показано на мал. 1.7. Коли $\{0, 1, \dots, N\}$ — це по-

Мал. 1.7. Граф переходів для системи зі стоком у стані N

ложення частинки в просторі, то кажуть, що існує поглинання на правій границі, оскільки, переходячи з стану N вправо, частинка залишає інтервал $\{0, 1, \dots, N\}$ назавжди. Аналогічну ситуацію

можна розглянути і на лівій границі, ї у будь-якій вершині загального графу переходів.

Для одержання зворотного балансного рівняння для системи зі стоком в стані N розглянемо рівн. (1.50), поклавши там $N + 1$ замість N . При цьому слід врахувати, що $r_{N+1}^+ = 0$. В результаті маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} p(k, t | 0, t') &= r_0^+(p(k, t | 0, t') - p(k, t | 1, t')), \\ \frac{d}{dt'} p(k, t | n, t') &= r_n^-(p(k, t | n, t') - p(k, t | n - 1, t')) + \\ &+ r_n^+(p(k, t | n, t') - p(k, t | n + 1, t')), \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{d}{dt'} p(k, t | N + 1, t') &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, N + 1. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Початкові умови (1.10) дають для останнього рівняння системи (1.55) наступне:

$$p(N + 1, t | N + 1, t) = 1, \quad p(k, t | N + 1, t) = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, N\},$$

що дозволяє одержати розв'язок

$$p(N + 1, t | N + 1, t') = 1, \quad p(k, t | N + 1, t') = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

З урахуванням останнього одержуємо з (1.55) зворотне балансне рівняння для системи зі стоком в стані N :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} p(k, t | 0, t') &= r_0^+(p(k, t | 0, t') - p(k, t | 1, t')), \\ \frac{d}{dt'} p(k, t | n, t') &= r_n^-(p(k, t | n, t') - p(k, t | n - 1, t')) + \\ &+ r_n^+(p(k, t | n, t') - p(k, t | n + 1, t')), \\ &n = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \frac{d}{dt'} p(k, t | N, t') &= \\ r_N^-(p(k, t | N, t') - p(k, t | N - 1, t')) + r_N^+ p(k, t | N, t'), \\ &k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Збереження позитивності

Систему рівнянь (1.51)-(1.53) можна подати у векторній формі

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A} \mathbf{X}(t), \quad (1.57)$$

де \mathbf{X} позначає $N + 1$ -вимірний вектор

$$\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \dots, X_N\} \in R^{N+1},$$

а матриця \mathbf{A} має наступний вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -r_0^+ & r_1^- & \dots & 0 & 0 \\ r_0^+ & -s_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_1^+ & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -s_{N-1} & r_N^- \\ 0 & 0 & \dots & r_{N-1}^+ & -r_N^- - r_N^+ \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

Рівняння (1.57) зберігає позитивність. Доведення цієї властивості цілком аналогічне доведенню, наведеному в п.1.3.2 для системи без стоку. Дійсно, елементи матриці \mathbf{A} для системи (1.51)-(1.53) співпадають з елементами матриці (1.32) за винятком останнього елемента в останньому рядку, який для системи зі стоком менший на r_N^+ : Ця відмінність не впливає на справедливість висновків п.1.3.2, тобто вірним залишається і співвідношення (1.30).

Асимптотична поведінка розв'язків

Нехай для системи зі стоком виконано умову (1.31). Наша мета — оцінити поведінку розв'язків рівняння (1.57), коли t зростає

до безмежності. Зауважимо, що в системі зі стоком повна ймовірність монотонно зменшується. Дійсно, додавши всі рівняння системи (1.51)-(1.53), одержимо:

$$\frac{d}{dt} \bar{P}(t) = -r_N^+ P_N(t), \quad \text{де } \bar{P}(t) = \sum_{n=0}^N P_n(t). \quad (1.59)$$

Монотонне зменшення $\bar{P}(t)$ слідує з (1.30) і (1.59). Міркування зі с.27 роблять справедливим твердження (1.38), звідки випливає, що матриця (1.58) не має власних значень з позитивною дійсною частиною. Міркування с.31 приводять до висновку, що матриця (1.58) не має власних значень на уявній осі, крім можливо нульового. Припустимо, що нульове власне значення існує, і \mathbf{X} — відповідний власний вектор. Цей вектор має бути інваріантний відносно еволюції. Рівняння для \mathbf{X} , аналогічне (1.59), має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{X}}(t) = -r_N^+ X_N(t),$$

звідки виходить: $X_N = 0$, оскільки $\bar{\mathbf{X}}(t)$ — стала величина за припущенням. Звідси і з рівняння (1.53) випливає, що $X_{N-1} = 0$. Рівняння (1.52) з $n = N-1$ має для \mathbf{X} наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} X_{N-1}(t) = -s_{N-1} X_{N-1}(t) + r_N^- X_N(t) + r_{N-2}^+ X_{N-2}(t),$$

звідки виходить: у інваріантного вектора $X_{N-2} = 0$. Міркуючи аналогічним чином, приходимо до висновку, що всі компоненти \mathbf{X} — нульові. Отже, припущення наявності у матриці (1.58) нульового власного значення — хибне. Таким чином, доведено наступне твердження: спектр матриці (1.58) знаходиться всередині лівої комплексної півплощини. Звідси, зокрема, — справедливість наступних граничних співвідношень:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^k X_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.60)$$

для будь-якого початкового вектора $\mathbf{X}(0)$ (див. [5, розд. 11, §11]).

1.3.6 Середній час життя системи зі стоком

Середній час життя системи зі стоком на одному кінці

Якщо система зі стоком знаходиться в одному зі своїх станів, який має номер n , то будемо казати, що вона існує в стані n . Якщо ж відбувся перехід у напрямку найбільш правої стрілки на Мал.1.7, то будемо казати, що система зникла або загинула. Нехай у початковий момент система перебуває в стані n . Потрібно обчислити середній час життя системи, $W(n)$.

Згідно з позначеннями (1.19) і (1.59),

$$\bar{P}(t) = \sum_{0 \leq k \leq N} p(k, t | n, 0), \quad (1.61)$$

де для зручності n' замінено на n . Оскільки в останній формулі присутня залежність від n , а зворотні балансні рівняння з різними n зв'язані, то в даному розділі цю залежність доцільно показати в функції $\bar{P}(t)$ в явному вигляді. Отже, замість (1.61) будемо писати:

$$\bar{P}(n, t) = \sum_{0 \leq k \leq N} p(k, t | n, 0). \quad (1.62)$$

Функція $\bar{P}(n, t)$ згідно з (1.62) дає ймовірність виживання системи протягом часу, не меншого від t , якщо при $t = 0$ вона перебувала в стані n . Якщо позначити час, який проходить від старту системи з стану n до її зникнення в процесі якої-небудь детерміністичної реалізації стохастичного процесу, через $w(n)$, то $\bar{P}(n, t)$ — це ймовірність того, що $w(n) \geq t$. Розглянувши (1.62) з $t + dt$ замість t , одержимо, що різниця $\bar{P}(n, t) - \bar{P}(n, t + dt)$ дає ймовірність того, що $t \leq w(n) < t + dt$. Врахувавши, що функція $\bar{P}(n, t)$ диференційована, можна обчислити останню ймовірність з точністю до першого порядку по dt :

$$\bar{P}(n, t) - \bar{P}(n, t + dt) = -\frac{d\bar{P}(n, t)}{dt} dt + o(t).$$

Останній вираз дозволяє обчислити середній час життя $W(n)$:

$$W(n) = - \int_0^\infty t \frac{d\bar{P}(n, t)}{dt} dt = \int_0^\infty \bar{P}(n, t) dt. \quad (1.63)$$

Тут враховано (1.60). Розглянемо зворотне балансне рівняння (1.56) для функцій $p(k, 0 | n, -t)$, де $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} p(k, 0 | 0, -t) &= r_0^+(p(k, 0 | 0, -t) - p(k, 0 | 1, -t)), \\ -\frac{d}{dt} p(k, 0 | n, -t) &= r_n^-(p(k, 0 | n, -t) - p(k, 0 | n-1, -t)) + \\ &+ r_n^+(p(k, 0 | n, -t) - p(k, 0 | n+1, -t)), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ -\frac{d}{dt} p(k, 0 | N, -t) &= r_N^-(p(k, 0 | N, -t) - p(k, 0 | N-1, -t)) + \\ &+ r_N^+(p(k, 0 | N, -t)), \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Останню систему перетворимо з врахуванням умови однорідності (1.7);

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} p(k, t | 0, 0) &= r_0^+(p(k, t | 0, 0) - p(k, t | 1, 0)), \\ -\frac{d}{dt} p(k, t | n, 0) &= r_n^-(p(k, t | n, 0) - p(k, t | n-1, 0)) + \\ &+ r_n^+(p(k, t | n, 0) - p(k, t | n+1, 0)), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ -\frac{d}{dt} p(k, t | N, 0) &= r_N^-(p(k, t | N, 0) - p(k, t | N-1, 0)) + \\ &+ r_N^+(p(k, t | N, 0)), \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Виконавши в кожному з цих рівнянь сумацію по k , одержимо систему диференціальних рівнянь для набору функцій $\bar{P}(n, t)$:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \bar{P}(0, t) &= r_0^+(\bar{P}(0, t) - \bar{P}(1, t)), \\ -\frac{d}{dt} \bar{P}(n, t) &= r_n^-(\bar{P}(n, t) - \bar{P}(n-1, t)) + \\ &+ r_n^+(\bar{P}(n, t) - \bar{P}(n+1, t)), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ -\frac{d}{dt} \bar{P}(N, t) &= r_N^-(\bar{P}(N, t) - \bar{P}(N-1, t)) + r_N^+ \bar{P}(N, t). \end{aligned}$$

Проінтегрувавши ці рівняння на інтервалі $[0; \infty[$ з врахуванням (1.60) і того, що $\bar{F}(n, 0) = 1$ для всіх n , одержимо систему рівнянь для $W(n)$:

$$\begin{aligned} 1 &= r_0^+(W(0) - W(1)), \\ 1 &= r_n^-(W(n) - W(n-1)) + \\ &+ r_n^+(W(n) - W(n+1)), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ 1 &= r_N^-(W(N) - W(N-1)) + r_N^+W(N) \end{aligned}$$

Для розв'язання останньої системи визначимо $W(N+1) = 0$ і введемо набір чисел

$$D_n = W(n+1) - W(n), \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Якщо знайдено D_n , то числа $W(n)$ одержуються за наступними формулами:

$$W(n) = - \sum_{n \leq l \leq N} D_l, \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (1.64)$$

Система рівнянь для D_n одержується з системи для $W(n)$ і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} 1 &= -r_0^+ D_0, \\ 1 &= r_n^- D_{n-1} - r_n^+ D_n, \quad n \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Перше з цих рівнянь дає

$$D_0 = -\frac{1}{r_0^+}, \quad (1.65)$$

а останні перепишемо в наступному вигляді:

$$D_n = \frac{r_n^-}{r_n^+} D_{n-1} - \frac{1}{r_n^+}, \quad n \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.66)$$

Для знаходження явного вигляду чисел D_n введемо набір вели-

чин Λ_n , $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ за такими формулами

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= 1, \quad \Lambda_n = \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{r_k^-}{r_k^+}, \quad n \in \{1, \dots, N-1\}, \\ \Lambda_N &= \Lambda_{N-1} \frac{r_N^-}{r_N^+}.\end{aligned}\tag{1.67}$$

Розв'язок (1.66) дається наступними формулами:

$$D_n = -\Lambda_n \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k}.\tag{1.68}$$

Доведемо останнє спiввiдношення методом математичної iндукцiї. Для $n = 0$ формула (1.68) дає $D_0 = -1/r_0^+$, що спiвпадає з (1.65). Припустимо (1.68) вiрне для $n = 0, 1, \dots, l$ i доведемо його справедливiсть для $n = l + 1$. Згiдно з (1.66), (1.68),

$$\begin{aligned}D_{l+1} &= \frac{r_{l+1}^-}{r_{l+1}^+} D_l - \frac{1}{r_{l+1}^+} = \frac{r_{l+1}^-}{r_{l+1}^+} \left(-\Lambda_l \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k} \right) - \frac{1}{r_{l+1}^+} = \\ &= -\Lambda_{l+1} \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k} - \frac{1}{r_{l+1}^+} = -\Lambda_{l+1} \sum_{0 \leq k \leq l+1} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k},\end{aligned}$$

що спiвпадає з (1.68) при $n = l + 1$. Що i треба було довести.

Використавши (1.64), (1.68), одержимо середнiй час життя:

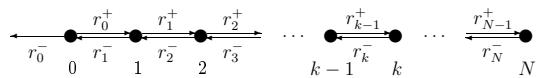
$$W(n) = \sum_{n \leq l \leq N} \Lambda_l \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}.\tag{1.69}$$

Зауваження. Формула (1.69) дає середнiй час життя, $W(n)$, при спецiальнiй нумерацiї станiв системи вiд 0 до N . Оскiльки нумерацiю можна вибрати довiльним чином, то формулу (1.69) можна розглядати як унiверсальнu. З iншого боку, в деяких випадках корисно мати формулу $W^a(n)$, яка дає значення W для зсунутої нумерацiї, коли набiр станiв має номери з множини $\{a, a +$

$1, \dots, a+N\}$, де a — довільне ціле число. Для одержання виразу $W^a(n)$ зауважимо, що справедлива формула $W^a(n) = W(n-a)$, $a \leq n \leq N+a$, звідки

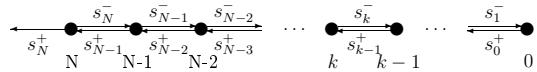
$$W^a(n) = \sum_{n \leq l \leq N+a} \Lambda_{l-a} \sum_{a \leq k \leq l} \frac{1}{r_{k-a}^+ \Lambda_{k-a}}, \quad n \in \{a, a+1, \dots, N+a\}. \quad (1.70)$$

Можна також розглянути систему зі стоком на лівому кінці замість правого (Мал. 1.8). Позначимо її середній час життя при старті з стану k через $T(k)$. Фізично ця ситуація не відрізняється



Мал. 1.8. Граф переходів для системи зі стоком в стані 0

від попередньої, оскільки після розвороту на π Мал. 1.8 співпадає з Мал. 1.7. В той же час явні формулі будуть дещо відмінними, оскільки переходи вліво стануть переходами вправо і навпаки. Крім того, остання рівність в (1.67) втрачає зміст, оскільки для



Мал. 1.9. Граф переходів для системи зі стоком у стані 0 в нових позначеннях

нової системи $r_N^+ = 0$. З іншого боку, для цієї системи можна визначити Λ_{-1} як

$$\Lambda_{-1} = \frac{r_0^+}{r_0^-}. \quad (1.71)$$

Знайдемо потрібні формулі. З цією метою змінимо нумерацію

станів так, що стан з номером k одержить номер $l = N - k$. Введемо також новий набір швидкостей переходів за формулами

$$s_0^- = r_N^+ = 0, \quad s_0^+ = r_N^- > 0, \quad s_k^\pm = r_{N-k}^\mp > 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.72)$$

Система в нових позначеннях зображенна на Мал.1.9. Опис системи в нових позначеннях співпадає з описом системи зі стоком на правому кінці з новими швидкостями, s_k^+ , s_k^- . Отже, для одержання середнього часу життя $T(n)$ в новій системі та в нових позначеннях можна використати формулу (1.69):

$$T(n) = \sum_{n \leq l \leq N} \Lambda_l^s \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{s_k^+ \Lambda_k^s}, \quad n \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{нова нумерація}), \quad (1.73)$$

де величини Λ_l^s даються наступними формулами:

$$\Lambda_0^s = 1, \quad \Lambda_n^s = \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{s_k^-}{s_k^+}, \quad n \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.74)$$

Для одержання середнього часу життя в старій нумерації треба в лівій частині (1.73) підставити $N - n$ замість n і в одержаний формулі виконати заміну змінної ($N - n \rightarrow n$):

$$T(N - n) = \sum_{n \leq l \leq N} \Lambda_l^s \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{s_k^+ \Lambda_k^s}, \quad n \in \{1, \dots, N\},$$

(стара нумерація), звідки

$$\begin{aligned} T(n) &= \\ &= \sum_{N-n \leq l \leq N} \Lambda_l^s \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{s_k^+ \Lambda_k^s} = \sum_{0 \leq N-l \leq n} \Lambda_l^s \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{s_k^+ \Lambda_k^s} = \\ &= \sum_{0 \leq l \leq n} \Lambda_{N-l}^s \sum_{0 \leq k \leq N-l} \frac{1}{s_k^+ \Lambda_k^s} = \sum_{0 \leq l \leq n} \Lambda_{N-l}^s \sum_{l \leq k \leq N} \frac{1}{s_{k-l}^+ \Lambda_{k-l}^s} \quad (1.75) \end{aligned}$$

Останній вираз можна подати через величини Λ_k , означені в (1.67), (1.71), якщо врахувати наступне співвідношення:

$$\Lambda_n^s = \Lambda_{N-n-1} / \Lambda_{N-1}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

В результаті одержуємо середній час життя

$$\boxed{T(n) = \sum_{0 \leq l \leq n} \Lambda_{l-1} \sum_{l \leq k \leq N} \frac{1}{r_k^- \Lambda_{k-1}}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}.} \quad (1.76)$$

Аналогічно попередньому, для зсунутої на a нумерації станів з (1.76) одержується:

$$T^a(n) = \sum_{a \leq l \leq n} \Lambda_{l-a-1} \sum_{l \leq k \leq N+a} \frac{1}{r_{k-a}^- \Lambda_{k-a-1}}, \quad (1.77)$$

де $n \in \{a, a+1, \dots, N+a\}$.

Середній час життя системи зі стоком на двох кінцях

Для одержання зворотного балансного рівняння для системи граф переходів якої лінійний, складається зі станів $\{0, 1, \dots, N\}$, і в якій має місце сток на обох кінцях, розглянемо охоплюючу систему зі станами $\{-1, 0, 1, \dots, N, N+1\}$. В цій системі стани $\{0, 1, \dots, N\}$ співпадають зі станами вихідної системи, а граф переходів має наступний вигляд: Швидкості переходів охоплюючої системи



Мал. 1.10. Система зі стоком на обох кінцях

співпадають із швидкостями вихідної системи, крім двох нових, які рівні нулю:

$$r_{-1}^+ = r_{N+1}^- = 0. \quad (1.78)$$

Охоплююча система — замкнена (без стоку), для неї справедливе рівняння типу (1.50):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} p(k, t | n, t') &= r_n^-(p(k, t | n, t') - p(k, t | n - 1, t')) + \\ &\quad + r_n^+(p(k, t | n, t') - p(k, t | n + 1, t')), \quad (1.79) \\ k, n \in \{-1, 0, 1, \dots, N, N+1\}, \quad r_0^- &\neq 0, \quad r_N^+ \neq 0, \\ p(k, t | -2, t') &= p(k, t | N+2, t') = 0. \end{aligned}$$

З (1.78) випливає, що $p(k, t | -1, t') = 0$ при $k \geq 0$ і $p(k, t | N+1, t') = 0$ при $k \leq N$. Останнє дозволяє одержати з (1.79) замкнену систему рівнянь для величин $p(k, t | n, t')$, $k, n \in \{0, 1, \dots, N\}$, яка і буде зворотним балансним рівнянням для системи зі стоком на обох кінцях. Рівняння цієї системи мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} p(k, t | 0, t') &= r_0^- p(k, t | 0, t') + \\ &\quad + r_0^+(p(k, t | 0, t') - p(k, t | 1, t')), \quad k \in \{0, 1, \dots, N\}, \\ \frac{d}{dt'} p(k, t | n, t') &= r_n^-(p(k, t | n, t') - p(k, t | n - 1, t')) + \\ &\quad + r_n^+(p(k, t | n, t') - p(k, t | n + 1, t')), \quad (1.80) \\ n \in \{1, \dots, N-1\}, \quad k &\in \{0, 1, \dots, N\}, \\ \frac{d}{dt'} p(k, t | N, t') &= r_N^-(p(k, t | N, t') - p(k, t | N-1, t')) + \\ &\quad + r_N^+(p(k, t | N, t')), \quad k \in \{0, 1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Так само, як і для системи зі стоком на одному кінці, середній час життя системи при старті зі стану n , $L(n)$, можна одержати за формулою (1.63). При цьому ми припускаємо справедливість умови (1.31). Міркування зі с. 36, необхідні для справедливості формулі (1.63), можна провести і для стоку на обох кінцях. Ми обмежимось лише зауваженням: якщо $t^k \bar{P}(n, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для стоку на одному кінці, то наявність ще одного стоку може лише пришвидшити збіжність до нуля.

Повторивши дослівно міркування с. 39, одержимо з (1.80) си-

тему рівнянь для величин $L(n)$:

$$\begin{aligned} 1 &= r_0^- L(0) + r_0^+ (L(0) - L(1)) \\ 1 &= r_n^- (L(n) - L(n-1)) + r_n^+ (L(n) - L(n+1)), \quad 0 < n < N, \\ 1 &= r_N^- (L(N) - L(N-1)) + r_N^+ L(N). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Для розв'язання останньої системи визначимо $L(-1) = L(N+1) = 0$ і введемо набір чисел $D_n = L(n+1) - L(n)$, $n \in \{-1, 0, 1, \dots, N\}$. Якщо знайдено числа D_n , то $L(n)$ знаходяться за формулами

$$L(n) = \sum_{-1 \leq l < n} D_l, \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (1.82)$$

Рівняння для чисел D_n одержуємо з (1.81):

$$1 = r_n^- D_{n-1} - r_n^+ D_n, \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (1.83)$$

З означення D_n випливає ще одне рівняння:

$$\sum_{-1 \leq n \leq N} D_n = 0. \quad (1.84)$$

Систему (1.83) перепишемо в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} D_0 &= -\frac{1}{r_0^+} + \frac{r_0^-}{r_0^+} D_{-1}, \\ D_n &= -\frac{1}{r_n^+} + \frac{r_n^-}{r_n^+} D_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.85)$$

звідки видно, що система (1.85) співпадає з системою (1.65), (1.66) за винятком першого рівняння, яке має зайвий доданок $\Delta_0 = \frac{r_0^-}{r_0^+} D_{-1}$. Позначимо через \tilde{D}_n , $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, розв'язок системи (1.85) при умові, що $\Delta_0 = 0$. Цей розв'язок дається формулами (1.68). Розв'язок системи (1.85) з правильним значенням Δ_0 можна подати в наступному вигляді:

$$D_n = \tilde{D}_n + \Delta_n, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Підставивши останнє в (1.85) і врахувавши, що \tilde{D}_n задовольняють (1.65), (1.66), одержимо рівняння для чисел Δ_n :

$$\Delta_n = \frac{r_n^-}{r_n^+} \Delta_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

звідки

$$\Delta_n = \Delta_0 \Lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

де Λ_n визначено в (1.67). Використавши останнє і (1.68), маємо:

$$D_n = -\Lambda_n \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k} + \Delta_0 \Lambda_n, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (1.86)$$

В цих формулах набір із $N + 1$ величин D_n визначається через невизначене число D_{-1} (або Δ_0). Для усунення невизначеності використаємо рівняння (1.84):

$$D_{-1} + \sum_{0 \leq n \leq N} \left(-\Lambda_n \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k} + \frac{r_0^-}{r_0^+} D_{-1} \Lambda_n \right) = 0.$$

що еквівалентно наступному:

$$\frac{r_0^-}{r_0^+} D_{-1} - \sum_{-1 \leq n \leq N} \Lambda_n = \sum_{0 \leq n \leq N} \Lambda_n \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k}.$$

Тут використано означення Λ_{-1} (1.71). З останнього маємо:

$$\Delta_0 = \frac{\sum_{0 \leq n \leq N} \Lambda_n \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k}}{\sum_{-1 \leq n \leq N} \Lambda_n}.$$

Підставивши останнє в (1.86) і далі в (1.82), маємо:

$$\begin{aligned} L(n) &= \\ &= \frac{1}{Q} \left(\left(\sum_{-1 \leq l < n} \Lambda_l \right) \left(\sum_{-1 \leq l \leq N} \Lambda_l \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{-1 \leq l \leq N} \Lambda_l \right) \left(\sum_{-1 \leq l < n} \Lambda_l \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k} \right) \right), \quad (1.87) \end{aligned}$$

де $Q = \sum_{-1 \leq n \leq N} \Lambda_n$. Розіб'ємо область сумації в другій і четвертій сумах в (1.87) на дві множини наступним чином: $\{-1, 0, \dots, N\} = \{-1, 0, \dots, n-1\} \cup \{n, n+1, \dots, N\}$. Це дозволяє скоротити деякі доданки. В результаті одержуємо:

$$\begin{aligned} L(n) = \frac{1}{Q} & \left(\left(\sum_{-1 \leq l < n} \Lambda_l \right) \left(\sum_{n \leq l' \leq N} \Lambda_{l'} \sum_{0 \leq k \leq l'} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\sum_{n \leq l' \leq N} \Lambda_{l'} \right) \left(\sum_{-1 \leq l < n} \Lambda_l \sum_{0 \leq k \leq l} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k} \right) \right). \end{aligned}$$

Перепозначивши в другому доданку останньої формули $l \rightarrow l'$ і $l' \rightarrow l$ і виконавши скорочення, маємо для середнього часу життя формулу:

$$L(n) = \frac{1}{Q} \sum_{\substack{-1 \leq l < n \\ n \leq l' \leq N}} \Lambda_l \Lambda_{l'} \sum_{l < k \leq l'} \frac{1}{r_k^+ \Lambda_k}. \quad (1.88)$$

1.4 Конкретні системи

1.4.1 Хімічні реакції

Реакція зв'язування-звільнення рецепторів

Розглянемо наступну хімічну реакцію:



Тут R позначає рецепторну молекулу, Z позначає молекулу запаху. Молекул запаху є необмежена кількість, їх концентрація, $[Z]$, підтримується сталою навколо рецепторних молекул. ZR позначає комплекс, в якому одна молекула запаху зв'язана з одною

рецепторною молекулою. Зв'язування з рецепторними молекулами слабке, отже, — під дією теплових хаотичних зіткнень може відбутись звільнення. Таким чином, кожна рецепторна молекула постійно змінює випадковим чином свій стан від вільного до зв'язаного і навпаки. Повне число (концентрація) вільних і зв'язаних рецепторів вважається сталим. Зміна в часі концентрації зв'язаних рецепторів відбувається за емпіричним законом діючих мас:

$$\frac{d}{dt}[ZR] = k_+[Z][R] - k_-[ZR], \quad (1.90)$$

де константи швидкостей реакцій k_+ , k_- знаходяться експериментально.

Реакція конформаційного переходу

Нехай деяка молекула C може знаходитись у двох різних конформаційних станах, $C^\#$ і C^* , переходить між якими здійснюються випадково при дії теплових зіткнень. Відповідна хімічна реакція схематично зображається наступним чином:



Повна концентрація $[C] = [C^*] + [C^\#]$ підтримується сталою. Для цієї реакції кінетичне рівняння, аналогічне (1.90), має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt}[C^*] = \kappa_2[C^\#] - \kappa_1[C^*], \quad (1.92)$$

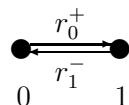
де константи швидкостей реакцій κ_1 , κ_2 знаходяться експериментально. Порівнюючи системи (1.89), (1.90) і (1.91), (1.92) можна побачити, що вони еквівалентні, якщо співставити C^* зв'язаному рецептору, а $C^\#$ — вільному і покласти:

$$\kappa_1 = k_-, \quad \kappa_2 = k_+[Z]. \quad (1.93)$$

Отже, дослідивши властивості однієї з них, ми одержимо висновки і відносно другої.

1.4.2 Поодинокий рецептор

У розглянутих вище хімічних системах вважається, що процеси на окремому рецепторі R або в окремій молекулі C відбуваються незалежно від інших рецепторів, або молекул. Отже, в цьому випадку доцільно розглянути систему, яка складається з одного рецептора. Граф переходів для такої системи зображенено на Мал.1.11. Ця система має всього чотири перехідних імовірності:



Мал. 1.11. Граф переходів для окремого рецептора

сті: $p(0, t | 0, 0)$, $p(1, t | 0, 0)$, $p(0, t | 1, 0)$, $p(1, t | 1, 0)$. Балансне рівняння для перших двох має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(0, t | 0, 0) &= -r_0^+ p(0, t | 0, 0) + r_1^- p(1, t | 0, 0), \\ \frac{d}{dt} p(1, t | 0, 0) &= -r_1^- p(1, t | 0, 0) + r_0^+ p(0, t | 0, 0). \end{aligned} \quad (1.94)$$

Нижче буде встановлено зв'язок швидкостей r_i^+ , r_i^- з введеними вище константами швидкостей хімічних реакцій. Умови нормування (1.11) дозволяють одержати з (1.94) замкнене рівняння для кожної з двох перехідних імовірностей. В результаті розв'язок (1.94) має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} p(0, t | 0, 0) &= e^{-\gamma t} + \frac{r_1^-}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \\ p(1, t | 0, 0) &= \frac{r_0^+}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \quad p(0, t | 1, 0) = \frac{r_1^-}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \\ p(1, t | 1, 0) &= e^{-\gamma t} + \frac{r_0^+}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \text{ де } \gamma = r_0^+ + r_1^-. \end{aligned} \quad (1.95)$$

З цих розв'язків видно, що при $t \rightarrow \infty$ початковий стан рецептора “забувається” і ймовірність знайти його зв'язаним або вільним не залежить від початкового стану, —

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(0, t | n, 0) = \frac{r_1^-}{\gamma}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p(1, t | n, 0) = \frac{r_0^+}{\gamma}, \quad n = 0, 1, \quad (1.96)$$

а визначається виключно швидкостями переходів. При такій ситуації кажуть, що система перебуває в стані термодинамічної рівноваги, оскільки швидкості переходів створюються хаотичним тепловим рухом.

Формули (1.69), (1.76) дозволяють знайти середній час $\overline{T_0}$ і $\overline{T_1}$ перебування рецептора в вільному і зв'язаному станах відповідно. Ale для поодинокого рецептора можна знайти більше, а саме статистику довжин періодів T_0 і T_1 неперервного перебування в станах 0 і 1.

Нехай у момент 0 рецептатор вільний. Знайдемо ймовірність того, що перший переход в зв'язаний стан відбудеться на проміжку $[t; t + dt]$. Розіб'ємо для цього інтервал $[0; t]$ на n рівних відрізків. Для того, щоб стан 0 зберігався протягом часу t необхідно, щоб переход не відбувся на кожному з n відрізків. Згідно з означенням швидкостей переходів, імовірність збереження стану 0 на одному відрізку дается виразом

$$1 - r_0^+ \frac{t}{n} + o(t/n),$$

а ймовірність $\pi_0(t)$ того, що переход не відбудеться на всьому інтервалі $[0; t]$, — виразом

$$\pi_0(t) = \left(1 - r_0^+ \frac{t}{n} + o(t/n)\right)^n.$$

Виконавши в останньому виразі граничний переход $n \rightarrow \infty$, одержимо:

$$\pi_0(t) = e^{-r_0^+ t}.$$

Ймовірність того, що перехід відбудеться на проміжку $[t; t + dt]$ дается виразом $r_0^+ dt$. Перемноживши останні два вирази, одержимо шуканий розподіл імовірності:

$$P\{t \leq T_0 \leq t + dt\} = e^{-r_0^+ t} r_0^+ dt. \quad (1.97)$$

Аналогічно для імовірності інтервалу T_1 перебування в зв'язаному стані одержимо:

$$P\{t \leq T_1 \leq t + dt\} = e^{-r_1^- t} r_1^- dt. \quad (1.98)$$

Формули (1.97), (1.98) мають експонентну залежність від t , характерну для пуассонівського стохастичного процесу (див. (2.10)). Середній час перебування в вільному, $\overline{T_0}$, та зв'язаному, $\overline{T_1}$, станах одержується з (1.97), (1.98):

$$\overline{T_0} = \int_0^\infty t e^{-r_0^+ t} r_0^+ dt = \frac{1}{r_0^+}, \quad \overline{T_1} = 1/r_1^-.$$

Для зіставлення швидкостей переходів r_i^\pm з фізичними константами, котрі фігурують в (1.89)-(1.92), знайдемо розв'язок (1.90) при початковій умові $[ZR](0) = 0$. Враховуючи, що сумарна концентрація вільних і зв'язаних рецепторів є сталою, —

$$[R] + [ZR] = c,$$

одержимо з (1.90) замкнене рівняння для $[ZR]$:

$$\frac{d}{dt}[ZR] = -(k_+[Z] + k_-)[ZR] + k_+[Z]c.$$

Його розв'язок при нульовій початковій умові має вигляд:

$$[ZR](t) = c \frac{k_+[Z]}{k_+[Z] + k_-} \left(1 - e^{-(k_+[Z] + k_-)t} \right). \quad (1.99)$$

Порівнюючи останній вираз з (1.95) і врахувавши, що при вибраній початковій умові $[ZR](t) = c p(1, t | 0, 0)$, одержимо:

$$r_0^+ = k_+[Z], \quad r_1^- = k_-. \quad (1.100)$$

1.4.3 Флуктуації в системі N рецепторів

Перехідні ймовірності для системи N рецепторів

Нехай система містить N рецепторів, котрі перебувають під дією запаху Z в концентрації $[Z]$. Якщо число N дуже велике, $\sim 10^{23}$ (число молекул в 1 см^3 повітря), то кінетика такої системи звичайно описується в термінах концентрації згідно з рівнянням (1.90). При цьому $[ZR] = \frac{n}{V}$, $[R] = \frac{N-n}{V}$, де n позначає число зайнятих рецепторів. Зокрема, в стані термодинамічної рівноваги (1.99) дає:

$$[ZR] = \frac{n}{V} = \frac{N}{V} \frac{k_+[Z]}{k_+[Z] + k_-}. \quad (1.101)$$

Звідси одержуємо ймовірність p , того, що довільний рецептор зв'язаний в довільний момент часу

$$p = \frac{n}{N} = \frac{1}{1 + \frac{[Z]_{1/2}}{[Z]}}, \quad (1.102)$$

де $[Z]_{1/2} = k_-/k_+$ — концентрація запаху, при якій у середньому половину рецепторів зв'язано в стані рівноваги, що узгоджується з (1.96) при врахуванні (1.100). Формули (1.99), (1.101) дають усереднену по деякому малому, але більшому ніж γ^{-1} часу характеристику системи, яка має форму детерміністичного прогнозу. В той же час, оскільки концентрація зв'язаних рецепторів створюється в результаті випадкової асоціації-дисоціації згідно з схемою (1.89), то істинна миттєва концентрація може з певною ймовірністю бути будь-якою від 0 до $\frac{N}{V}$, відповідно число зв'язаних рецепторів — від 0 до N . Випадкові відхилення числа зв'язаних рецепторів від середнього в стані термодинамічної рівноваги називаються флуктуаціями. В формулах (1.99), (1.101) флуктуаціями знехтувано, але в деяких випадках вони можуть відігравати істотну роль. Це можливо, зокрема, коли N недостатньо велике, або коли спостереження за системою організовано так, що вплив флуктуацій може проявитись, незважаючи на великий розмір си-

стеми^{10,11}. В цих випадках слід розглядати динаміку миттевого значення числа зв'язаних рецепторів n або їх концентрації, що приводить до стохастичного процесу з лінійним графом переходів, описаного рівняннями (1.16) або (1.50). При цьому стан, в якому зв'язано n рецепторів, має номер n , а швидкості переходів даються наступними виразами:

$$r_n^+ = k_+[Z](N-n), \quad r_n^- = k_-n, \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (1.103)$$

Балансне рівняння для перехідних імовірностей має в позначеннях (1.93) наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dp(n, t | n', 0)}{dt} = & -(\kappa_1 n + \kappa_2(N-n))p(n, t | n', 0) + \\ & + \kappa_1(n+1)p(n+1, t | n', 0) + \\ & + \kappa_2(N-n+1)p(n-1, t | n', 0), \quad 0 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (1.104)$$

де N — повна кількість вільних і зв'язаних рецепторів або число молекул сорту C . Замість системи (1.104) розглянемо рівняння для твірної функції $G(s, t) = \sum_{n \geq 0} s^n p(n, t | n', 0)$:

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = (\kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1)s - \kappa_2 s^2) \frac{\partial G(s, t)}{\partial s} + \kappa_2 N(s-1)G(s, t) \quad (1.105)$$

з початковими і граничними умовами

$$G(s, 0) = s^{n'}, \quad G(1, t) = 1. \quad (1.106)$$

Якщо відомо явний вигляд твірної функції, то перехідні ймовірності обчислюються шляхом диференціювання:

$$p(n, t | n', 0) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n G(s, t)}{\partial s^n} \right|_{s=0}. \quad (1.107)$$

¹⁰Зокрема, для кварцевих резонаторів малого розміру спостерігаються флуктуації їх власної частоти [6], які виникають завдяки випадковій адсорбції-десорбції молекул газу на поверхні резонатора. Відповідний частотний і фазовий шум називається шумом адсорбції-десорбції.

¹¹Наприклад, голубий колір неба спостерігається завдяки флуктуаціям густини повітря, хоча об'єм атмосфери надзвичайно великий.

Введемо наступні позначення:

$$f_1(s) = \kappa_2 s^2 - (\kappa_2 - \kappa_1)s - \kappa_1, \quad f_2(s) = \kappa_2 N(s - 1).$$

В цих позначеннях рівняння (1.105) набуває наступного вигляду:

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = -f_1(s) \frac{\partial G(s, t)}{\partial s} + f_2(s)G(s, t). \quad (1.108)$$

Зробимо наступну заміну змінних в (1.108):

$$G(s, t) = \exp(h(s))g(s, t),$$

де функція $h(s)$ знаходиться з умови:

$$h'(s) = \frac{f_2(s)}{f_1(s)},$$

або

$$\begin{aligned} h(s) &= \kappa_2 N \int \frac{(s-1)ds}{\kappa_2 s^2 - (\kappa_2 - \kappa_1)s - \kappa_1} + C = \\ &= \kappa_2 N \left(-\frac{1}{\kappa_2 + \kappa_1} \ln \left| \frac{s-1}{s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \right| \right) \\ &\quad + \kappa_2 N \left(\frac{1}{2\kappa_2} \ln | \kappa_2 s^2 - (\kappa_2 - \kappa_1)s - \kappa_1 | \right) + \\ &\quad + \kappa_2 N \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2\kappa_2(\kappa_2 + \kappa_1)} \ln \left| \frac{s-1}{s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \right| \right) + C = \\ &= \frac{N}{2} \left(\ln | f_1(s) | - \ln \left| \frac{s-1}{s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \right| \right) + C = N \ln \left(s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) + C. \end{aligned}$$

Поклавши в останній рівності $C = 0$, одержимо

$$G(s, t) = \left(s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)^N g(s, t), \quad (1.109)$$

з початковими і граничними умовами для функції $g(s, t)$

$$g(s, 0) = s^{n'} \left(s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)^{-N}, \quad (1.110)$$

$$g(1, t) = \left(1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{-N}. \quad (1.111)$$

Підставивши (1.109) в (1.105), одержимо наступне рівняння для $g(s, t)$:

$$\frac{\partial g(s, t)}{\partial t} = -f_1(s) \frac{\partial g(s, t)}{\partial s} \quad (1.112)$$

Нехай $g(s, t) = \phi(z(s, t))$, де $z(s)$ визначається з умови: $f_1(s)z'(s) = 1$, отже,

$$z(s) = \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} \ln \frac{s - 1}{s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}}.$$

Підставивши останнє в (1.112), одержимо рівняння для функції $\phi(z, t)$:

$$\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z},$$

звідки $\phi(z, t) = F(z - t)$, де $F(\cdot)$ — довільна функція. Виберемо її в формі $f \circ \exp \circ \gamma$, де $f(\cdot)$ також довільна. Отже,

$$g(s, t) = f \left(e^{-\gamma t} \frac{s - 1}{s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \right). \quad (1.113)$$

Початкові і граничні умови (1.110), (1.111) для $g(s, t)$ дають:

$$g(1, t) = f(0) = \left(1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{-N},$$

$$g(s, 0) = f \left(\frac{s - 1}{s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \right) = s^{n'} \left(s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)^{-N}.$$

Для знаходження явного вигляду $f(x)$ позначимо¹²:

$$\varphi(s) = \frac{s - 1}{s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) = \frac{1 + x^{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}}{1 - x}.$$

Отже,

$$f(\varphi(s)) = s^{n'} \left(s + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)^{-N} \Leftrightarrow$$

¹² $\varphi^{-1}(x)$ позначає функцію, обернену до функції $\varphi(s)$.

$$\Leftrightarrow f(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = \left(\frac{1+x^{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}}{1-x} \right)^{n'} \cdot \left(\frac{1+\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}{1-x} \right)^{-N}.$$

Для одержання $g(s, t)$ слід, згідно з (1.113), підставити в останній вираз $e^{-\gamma t} \left(\frac{s-1}{s+\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \right)$ замість x :

$$g(s, t) = \left(\frac{1+\frac{\kappa_1}{\kappa_2}e^{-\gamma t} \frac{s-1}{s+q}}{1-e^{-\gamma t} \frac{s-1}{s+q}} \right)^{n'} \cdot \left(\frac{1+q}{1-e^{-\gamma t} \frac{s-1}{s+q}} \right)^{-N},$$

де $q = \kappa_1/\kappa_2$. Прямою перевіркою пересвідчуємось, що знайдений для $g(s, t)$ вираз задоволяє умови (1.110), (1.111). Використавши (1.109), маємо:

$$G(s, t) = \left(\frac{1+qe^{-\gamma t} \frac{(s-1)}{(s+q)}}{1-e^{-\gamma t} \frac{(s-1)}{(s+q)}} \right)^{n'} \left(\frac{s+q-e^{-\gamma t}(s-1)}{1+q} \right)^N. \quad (1.114)$$

З (1.114) можна за допомогою (1.107) одержати явні вирази для перехідних імовірностей, наприклад:

$$p(1, t | 0, 0) = \frac{N\kappa_2}{\gamma^N} (\kappa_1 + \kappa_2 e^{-\gamma t})^{N-1} (1 - e^{-\gamma t}), \quad (1.115)$$

$$p(2, t | 0, 0) = \frac{N(N-1)\kappa_2^2}{2\gamma^N} (\kappa_1 + \kappa_2 e^{-\gamma t})^{N-2} (1 - e^{-\gamma t})^2, \quad (1.116)$$

які дають розв'язок рівняння 1.104.

Стаціонарна твірна функція $G(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} G(s, t)$ має вигляд:

$$G(s) = ((s+q)/(1+q))^N.$$

Застосувавши останній вираз в (1.107) і врахувавши, що, згідно з (1.93), (1.102) $1/(1+q) = p$, $q/(1+q) = 1-p$, одержуємо

$$p(n, \infty | n', 0) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}.$$

Отже, після встановлення рівноваги число зв'язаних рецепторів розподілено за біноміальним законом, що можна було очікувати, виходячи з факту незалежності динаміки окремих рецепторів.

Середній час досягнення порогу

В деяких випадках, зокрема, для оцінки селективності нейро-сенсора (див. п.1.5.1), потрібно знати, як часто число зв'язаних рецепторів досягає певного порогового значення, N_0 , де $N_0 \in \{1, \dots, N\}$. Позначимо через $W(n)$ середній час очікування моменту t , коли число зв'язаних рецепторів $n(t) = N_0$, якщо в момент 0 їх було $n < N_0$. $W(n)$ можна обчислити за формулою (1.69), коли підставити в (1.67), (1.69) співвідношення (1.103), причому N в формулах (1.67), (1.69) слід замінити на $N_0 - 1$. Підставивши (1.103) в (1.67), одержуємо:

$$\Lambda_n = \prod_{1 \leq l \leq n} \frac{k_- l}{k_+[Z](N-l)} = \left(\frac{k_-}{k_+[Z]} \right)^n \frac{1}{C_{N-1}^n},$$

або, врахувавши (1.102),

$$\Lambda_n = \left(\frac{1-p}{p} \right)^n \frac{1}{C_{N-1}^n}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \quad (1.117)$$

Формула (1.69) з урахуванням останнього дає для середнього часу перебування під порогом:

$$\begin{aligned} W(n) &= \sum_{n \leq l \leq N_0-1} \left(\frac{1-p}{p} \right)^l \frac{1}{C_{N-1}^l} \sum_{0 \leq k \leq l} \left(\frac{p}{1-p} \right)^k \frac{C_{N-1}^k}{k_+[Z](N-k)} = \\ &= \frac{1}{k_-} \sum_{n \leq l \leq N_0-1} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{l+1} \frac{1}{C_{N-1}^{l+1}} \sum_{0 \leq k \leq l} \left(\frac{p}{1-p} \right)^k \frac{C_{N-1}^k}{(N-k)}. \end{aligned}$$

Тут враховано, що $k_+[Z] = k_- p / (1-p)$. Врахувавши в останньому виразі співвідношення

$$C_{N-1}^k / (N-k) = C_N^k / N, \quad N C_{N-1}^l = (l+1) C_N^{l+1}, \quad (1.118)$$

одержуємо:

$$W(n) = \frac{1}{k_-} \sum_{n \leq l \leq N_0-1} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{l+1} \frac{1}{C_N^{l+1}(l+1)} \sum_{0 \leq k \leq l} C_N^k \left(\frac{p}{1-p} \right)^k,$$

або

$$W(n) = \frac{1}{k_-} \sum_{n+1 \leq l \leq N_0} \frac{1}{lB(N, l, p)} \sum_{0 \leq k \leq l-1} B(N, k, p), \quad (1.119)$$

де $n \in \{0, \dots, N_0 - 1\}$ і

$$B(N, k, p) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}. \quad (1.120)$$

Розглянемо тепер ситуацію, коли початкове число зв'язаних рецепторів $n \geq N_0$. Нас цікавить середній час, $T(n)$, очікування моменту, коли $n(t) = N_0 - 1$. Для знаходження $T(n)$ можна застосувати формулу (1.76). Для цього слід розглянути систему зі стоком на лівому кінці, яка складається з $N - N_0 + 1$ станів $\{N_0, N_0 + 1, \dots, N\}$ вихідної системи зі швидкостями переходів вихідної системи. Якщо занумерувати ці стани від 0 до $N - N_0$, то одержимо систему зі станами $\{0, 1, \dots, N - N_0\}$ і набором пе-рехідних імовірностей

$$r_{N_0}^\pm, \quad r_{N_0+1}^\pm, \quad \dots, \quad r_{N-1}^\pm, \quad r_N^-.$$

Аналогом величин Λ_n , означених в (1.67), (1.71) тут будуть L_n :

$$L_{-1} = \frac{r_{N_0}^+}{r_{N_0}^-}, \quad L_0 = 1, \quad L_n = \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{r_{k+N_0}^-}{r_{k+N_0}^+}, \quad n = 1, \dots, N - N_0,$$

які можна подати через Λ_n наступним чином

$$L_n = \frac{\Lambda_{N_0+n}}{\Lambda_{N_0}}, \quad n = -1, 0, 1, \dots, N - N_0. \quad (1.121)$$

Якщо система стартує зі стану $n + N_0$, де $n \in \{0, \dots, N - N_0\}$, то формула (1.76) дає

$$T(n + N_0) = \sum_{0 \leq l \leq n} L_{l-1} \sum_{l \leq k \leq N - N_0} \frac{1}{r_{k+N_0}^- L_{k-1}},$$

де $n \in \{0, 1, \dots, N - N_0\}$. Підставимо сюди (1.121):

$$T(n + N_0) = \sum_{0 \leq l \leq n} \Lambda_{N_0+l-1} \sum_{l \leq k \leq N-N_0} \frac{1}{r_k^- \Lambda_{N_0+k-1}},$$

або

$$T(n + N_0) = \sum_{N_0 \leq l \leq N_0+n} \Lambda_{l-1} \sum_{l \leq k \leq N} \frac{1}{r_k^- \Lambda_{k-1}}, \quad n \in \{0, \dots, N - N_0\}.$$

Повертаючись тут до старої нумерації, маємо:

$$T(n) = \sum_{N_0 \leq l \leq n} \Lambda_{l-1} \sum_{l \leq k \leq N} \frac{1}{r_k^- \Lambda_{k-1}}, \quad n \in \{N_0, \dots, N\}. \quad (1.122)$$

Цікаво, що цей вираз майже співпадає за формою з (1.76). Підставимо (1.117) в (1.122):

$$T(n) = \sum_{N_0 \leq l \leq n} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{l-1} \frac{1}{C_{N-1}^{l-1}} \sum_{l \leq m \leq N} \frac{1}{m k_-} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{m-1} C_{N-1}^{m-1}.$$

Використаємо тут двічі друге з співвідношень (1.118):

$$T(n) = \frac{1}{k_-} \sum_{N_0 \leq l \leq n} \left(\frac{1-p}{p} \right)^l \frac{1}{l C_N^l} \sum_{l \leq m \leq N} C_N^m \left(\frac{p}{1-p} \right)^m.$$

Остаточно одержуємо наступну формулу для середнього часу піребування над порогом

$$T(n) = \frac{1}{k_-} \sum_{N_0 \leq l \leq n} \frac{1}{l B(N, l, p)} \sum_{l \leq m \leq N} B(N, m, p), \quad (1.123)$$

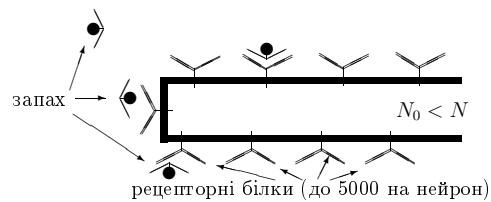
де $n \in \{N_0, \dots, N\}$ і $B(N, m, p)$ означено в (1.120).

1.5 Застосування

1.5.1 Селективність хеморецепторного нейрона

Конструкція хеморецепторного нейрона

Хеморецепторні нейрони є первинними клітинами, котрі сприймають запах або смак. Вони здійснюють перетворення хімічних сигналів, котрі надходять з зовнішнього середовища, в електричні сигнали нервових імпульсів, придатні до подальшого аналізу в вищих відділах нервової системи. Перетворення здійснюється наступним чином. Частина нейрона, експонована в зовнішнє середовище, має на своїй поверхні значну кількість рецепторних молекул (білків)¹³. Молекули запаху вступають у взаємодію з рецепторними молекулами, котра полягає в асоціації-диссоціації (зв'язуванні-звільненні) запаху і рецепторних молекул. Коли число зв'язаних рецепторних молекул перевищує певне порогове число, нейрон генерує нервовий імпульс (стріляє, або генерує спайк) (Мал. 1.12). Пороговий характер відгуку нейрона на зовнішній стимул забезпечується властивостями його збудливої мембрани [7]. Сенсор такого типу можна назвати нейросенсором.

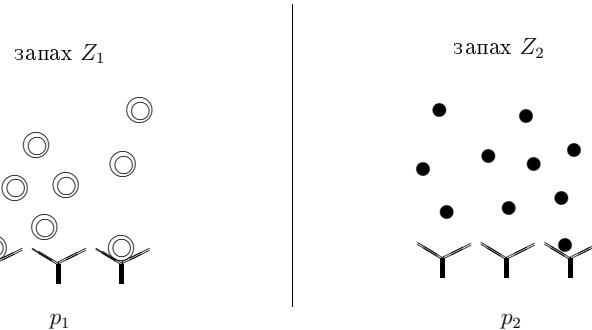


Мал. 1.12. Спрощена конструкція хеморецепторного нейрона

¹³Різні нейрони можуть бути заселені різними білками, але в межах окремого нейрона всі рецепторні молекули однакові.

Постановка задачі про селективність

Окремий рецепторний білок в оточенні молекул запаху може бути зв'язаним з певною ймовірністю, обчисленою в (1.102). З формулі (1.102) видно, що коли два різних запахи, Z_1 і Z_2 , діють на білок по черзі в рівних концентраціях, то ймовірності того, що білок зв'язано, в першому і другому випадках можуть відрізнятись. Відмінність імовірностей виникне тоді, коли внаслідок нерівних констант швидкостей реакцій, k_- , k_+ , для першого і другого запахів концентрації половинного заповнення виявляться нерівними: $[Z_1]_{1/2} \neq [Z_2]_{1/2}$. В цьому випадку кажуть, що рецепторний білок розрізняє запахи Z_1 і Z_2 , або має селективність по відношенню до цих запахів (Мал. 1.13). Нерівність імо-



Мал. 1.13. До означення селективності рецепторного білка. p_1 , p_2 — ймовірність зв'язування при пред'явленні запахів Z_1 , Z_2 в рівній концентрації

вірностей знайти білок зв'язаним буде також і тоді, коли один запах послідовно вживають у двох різних концентраціях. У цьому випадку кажуть про диференційну чутливість. Оскільки білок може реагувати на зміну стимулу виключно зміною ймовірності бути зв'язаним, то випадки різних запахів у рівній концентрації і одного запаху, представлена в різних концентраціях, не відрізняються на рівні окремого білка (і окремого нейрона). Відмін-

ність хімічного складу стимулу відносно незалежно від його концентрації встановлюється на вищих ділянках сенсорного тракту як результат інтеграції сигналів від багатьох рецепторних нейронів, заселених різними білками. В даному розділі, кажучи про селективність білка і нейрона, ми притримуємося парадигми двох запахів однакової концентрації (Мал. 1.13). Якщо ймовірність бути зв'язаним для першого і другого запаху позначити через p_1 і p_2 відповідно, то селективність білка, μ , щодо вказаних запахів можна оцінити наступним виразом:

$$\mu = \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (1.124)$$

Ми припускаємо для визначеності, що

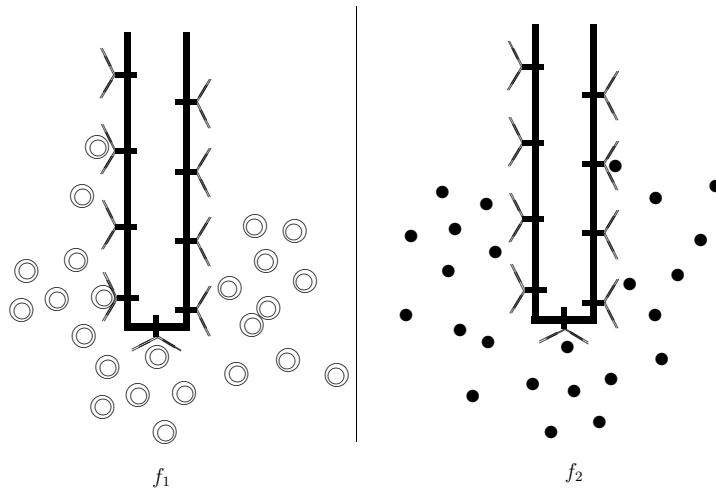
$$p_1 > p_2. \quad (1.125)$$

Якщо запахи Z_1 і Z_2 в рівній концентрації послідовно пред'являються рецепторному нейрону (Мал. 1.14), то нейрон буде генерувати імпульси з середньою частотою f_1 і f_2 , відповідно. Селективність нейрона щодо запахів Z_1 і Z_2 можна виміряти наступною величиною

$$\nu = \ln \frac{f_1}{f_2}. \quad (1.126)$$

Оцінка селективності

Для оцінки селективності рецепторного нейрона небхідно оцінити логарифм відношення частот його пострілів при пред'явленні різних запахів. Вище було сказано, що нейрон стріляє тоді, коли число зв'язаних рецепторів перевищує порогове. Але цього недосить для оцінки середньої частоти пострілів. Дійсно, перевищення порогу може тривати довгий час, і потрібно знати, скільки пострілів зробить нейрон за цей час. Також фізика запуску нейрона на генерацію вимагає, щоб перевищення порогу тривало певний мінімальний час, перш ніж почнеться спайк. Також частота



Мал. 1.14. До означення селективності рецепторного нейрона. f_1 , f_2 — середня частота пострілів при пред'явленні запахів Z_1 , Z_2 в рівній концентрації

пострілів нейрона має залежати від того, наскільки перевищено поріг. Неможливо аналітично проаналізувати всі ці деталі. Для одержання аналітичного результату ми приймемо деяку спрощену парадигму імпульсації. А саме, припускаємо, що (i) окремий імпульс триває протягом часу t_0 , після чого нейрон негайно починає новий імпульс, якщо все ще триває перевищення порогу, (ii) величини констант швидкостей реакцій такі, що середня тривалість перевищення порогу значно перевищує тривалість спайку, t_0 . В цих припущеннях нейрон стріляє з частотою $1/t_0$ впродовж інтервалу перевищення порогу і мовчить, коли число зв'язаних рецепторів нижче порогу. Середню частоту пострілів можна знайти за наступною формулою:

$$f = \frac{1}{t_0} \frac{T}{T + W}, \quad (1.127)$$

де T і W — середня довжина інтервалу перебування числа зв'язаних рецепторів над і під порогом відповідно. Оскільки процеси зв'язування-звільнення відбуваються під дією випадкових теплових зіткнень, то кількість зв'язаних рецепторів у кожний момент часу є випадковою величиною, описанаю в р.1.4.1. Величину T і W можна знайти, виходячи з формул (1.119) і (1.123). Дійсно, якщо позначити поріг через N_0 , то інтервал перебування над порогом починається тоді, коли число зв'язаних рецепторів дорівнює N_0 . Отже, середній час перебування над порогом — це величина $T(N_0)$ з формули (1.123). Середній час перебування під порогом — це величина $W(N_0 - 1)$ з формули (1.119). Таким чином, із (1.119) і (1.123) дістаємо при $n = N_0 - 1$ і $n = N_0$, відповідно

$$\boxed{W = \frac{1}{k_- N_0 B(N, N_0, p)} \sum_{0 \leq l \leq N_0 - 1} B(N, l, p),}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{k_- N_0 B(N, N_0, p)} \sum_{N_0 \leq l \leq N} B(N, l, p).} \quad (1.128)$$

Останні формули і (1.127) дозволяють оцінити середню частоту пострілів для кожного запаху наступним чином:

$$f_i = \frac{1}{t_0} \frac{T_i}{T_i + W_i} = \frac{1}{t_0} \sum_{N_0 \leq l \leq N} B(N, l, p_i), \quad i = 1, 2, \quad (1.129)$$

де T_i і W_i одержуються з формул (1.128) підстановкою p_i і k_{i-} замість p і k_- . Підставивши останнє в (1.126), одержуємо:

$$\nu = \ln \left(\left(\sum_{N_0 \leq l \leq N} B(N, l, p_1) \right) / \left(\sum_{N_0 \leq l \leq N} B(N, l, p_2) \right) \right). \quad (1.130)$$

Для подальшої оцінки селективності нейрона доведемо наступну лемму.

Лемма. Нехай p_1, p_2 — дійсні числа, котрі задовольняють нерівність

$$0 < p_2 < p_1 < 1,$$

а N_0, N — натуральні числа, котрі задовольняють нерівність

$$1 \leq N_0 \leq N < \infty.$$

Позначимо

$$p_0 = \frac{N_0}{N}, \quad r = \frac{p_1}{p_2}, \quad R = \frac{\sum_{N_0 \leq k \leq N} C_N^k p_1^k (1-p_1)^{N-k}}{\sum_{N_0 \leq k \leq N} C_N^k p_2^k (1-p_2)^{N-k}}.$$

Тоді справедлива нерівність

$$R \geq r^{N(p_0 - p_1)/(1-p_1)}. \quad (1.131)$$

Доведення. Маємо співвідношення:

$$\sum_{N_0 \leq k \leq N} C_N^k p_1^k (1-p_1)^{N-k} = \sum_{N_0 \leq k \leq N} C_N^k p_2^k (1-p_2)^{N-k} L_k, \quad (1.132)$$

де

$$L_k = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^k \left(\frac{1-p_1}{1-p_2} \right)^{N-k}.$$

Множник L_k приймає найменше значення при $k = N_0$:

$$\min_{N_0 \leq k \leq N} L_k = L_{N_0} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{N_0} \left(\frac{1-p_1}{1-p_2} \right)^{N-N_0}.$$

Враховуючи останнє, з (1.132) одержимо:

$$\sum_{N_0 \leq k \leq N} C_N^k p_1^k (1-p_1)^{N-k} > L_{N_0} \sum_{N_0 \leq k \leq N} C_N^k p_2^k (1-p_2)^{N-k},$$

звідки

$$R > \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{N_0} \left(\frac{1-p_1}{1-p_2} \right)^{N-N_0}.$$

Перепишемо останнє в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} R &> \exp \left(N_0 \ln \frac{p_1}{p_2} + (N - N_0) \ln \frac{1 - p_1}{1 - p_2} \right) = \\ &= \exp \left(N \ln \frac{p_1}{p_2} \left(p_0 + (1 - p_0) \frac{\ln \frac{1 - p_1}{1 - p_2}}{\ln \frac{p_1}{p_2}} \right) \right) = \\ &= \exp \left(N \ln \frac{p_1}{p_2} \left(p_0 - (1 - p_0) \frac{\ln \frac{1 - p_2}{1 - p_1}}{\ln \frac{p_1}{p_2}} \right) \right), \end{aligned}$$

звідки

$$R > \exp \left(N \ln \frac{p_1}{p_2} \left(p_0 - (1 - p_0) \frac{\ln \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{1 - p_1} \right)}{\ln \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{p_2} \right)} \right) \right). \quad (1.133)$$

Оцінимо вираз

$$\ln \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{1 - p_1} \right)$$

за допомогою співвідношення $\ln(1 + x) < x$ для всіх $x > 0$:

$$\ln \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{1 - p_1} \right) < \frac{p_1 - p_2}{1 - p_1}. \quad (1.134)$$

Оцінимо вираз

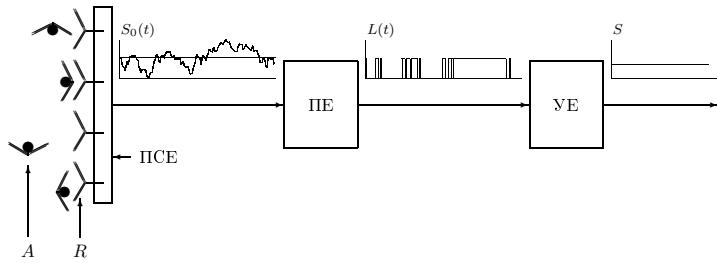
$$\ln \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{p_2} \right)$$

за допомогою співвідношення $\ln(1 + x) > x/(1 + x)$ для всіх $x > 0$:

$$\ln \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{p_2} \right) > \frac{\frac{p_1 - p_2}{p_2}}{1 + \frac{p_1 - p_2}{p_2}} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}. \quad (1.135)$$

Співвідношення (1.134), (1.135) дозволяють оцінити дріб

$$\frac{\ln \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{1 - p_1} \right)}{\ln \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{p_2} \right)} < \frac{\frac{p_1 - p_2}{1 - p_1}}{\frac{p_1 - p_2}{p_1}} = \frac{p_1}{1 - p_1}.$$



Мал. 1.15. Схематичне зображення порогового детектора. A — молекули аналіту; R — адсорбційні центри; ПСЕ — первинний сенсорний елемент; ПЕ — пороговий елемент; УЕ — усереднюючий в часі елемент.

Останнє співвідношення разом із (1.133) дає:

$$\begin{aligned} R &> \exp \left(N \ln \frac{p_1}{p_2} \left(p_0 - (1-p_0) \frac{p_1}{1-p_1} \right) \right) = \\ &= \exp \left(N \ln \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_0 - p_1}{1 - p_1} \right) \right) = r^{N(p_0 - p_1)/(1 - p_1)}, \end{aligned}$$

що доводить лемму.

Підставивши (1.131) в (1.130), дістаємо

$$\boxed{\nu > N \frac{p_0 - p_1}{1 - p_1} \mu.} \quad (1.136)$$

Величина $N(p_0 - p_1)/(1 - p_1)$ може виявитись значно більшою від одиниці. В цьому випадку селективність хеморецепторного нейрона буде значно кращою, ніж селективність його рецепторних білків.

1.5.2 Селективність порогового хімічного сенсора

Принцип дії детекторів хімічних субстанцій звичайно базується на селективній адсорбції-десорбції (зв'язуванні-звільнення) дослі-

джуваних хімічних речовин специфічними адсорбуючими ділянками (рецепторними центрами). Рецепторні центри знаходяться в контакті з електронним пристроєм, який дає змогу вимірювати кількість речовини, що була адсорбована під час процесу зв'язування-звільнення. Сам пристрій може бути або МЕМС типу (такий, як кварцовий кристал, частота коливань якого залежить від маси адсорбованої речовини), чи вібраючий консоль, польовий транзистор або інше. Такий пристрій із рецепторними центрами називається хімічним сенсором або детектором. Для того, щоб бути ефективним, детектор повинен розрізняти різні види речовин, тобто бути селективним. Його селективність звичайно є такою ж, як і його рецепторних молекул (див. рівняння (1.141), (1.142)).

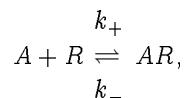
Розмір промислових сенсорів має стала тенденцію до зменшення. Потужність корисного сигналу, що виробляється малим детектором, стає дуже малою. Як результат шум детектора складає значну частину його вихідного сигналу, що негативно впливає на точність вимірювань. В залежності від конструкції є декілька причин для виникнення шуму в малому детекторі. Один тип шуму виникає через те, що процес адсорбції-десорбції підпорядкований броунівському руху, який є стохастичним. Як результат загальна кількість адсорбованої речовини (аналіту) залежить від нерегулярних флюкутацій, і це відображається на вихідному сигналі як наявність шуму (Мал. 1.17). Цей шум називається шумом адсорбції-десорбції [6]. Дане явище присутнє в будь-якому детекторі, принцип дії якого базується на зв'язуванні-звільненні аналіту. Шум адсорбції-десорбції може домінувати над всіма іншими типами внутрішнього шуму і складати більшу частину вихідного сигналу, якщо розмір сенсора достатньо малий. У цьому розділі показано, що шум адсорбції-десорбції можна використати для підвищення селективності в пороговому детекторі.

Пороговий детектор

Детектор порогового типу (ПД), Мал. 1.15, діє наступним чином [8, 9]: флюктуючий сигнал, що характеризує кількість адсорбованого аналіту в первинному сенсорному елементі (ПСЕ в Мал. 1.15), подається в амплітудний дискримінаційний елемент (пороговий елемент, ПЕ на Мал. 1.15). Пороговий елемент характеризується певним порогом. Він дає нуль на виході, якщо адсорбована кількість є підпороговою, та видає стандартний сталий сигнал, коли адсорбована кількість рівна або вища від порогу. Вихід порогового елементу всереднюється в часі і практично стає незалежним від часу. Цей сигнал розглядається як результат роботи ПД.

Означення і припущення

Процес адсорбції-десорбції описується так само, як (1.89) наступним хімічним рівнянням асоціації-дисоціації:



де A , R , AR означають молекули аналіту, адсорбуючий центр (рецептор) та бінарний комплекс аналіт-рецептор. При сталій температурі константи швидкостей k_+ , k_- є часово незалежними. Вони можуть бути визначеними або з експериментальних вимірювань, або оцінені теоретично. Нехай N означає загальне число рецепторів у детекторі. Аналіт наявний у концентрації c . Ймовірність p для будь-якого R бути зв'язаним з A дается так само, як і в (1.102), — формулою

$$p = \frac{k_+ c}{k_+ c + k_-}. \quad (1.137)$$

Середнє число адсорбованих молекул, $\langle n \rangle$, може бути вирахуване наступним чином:

$$\langle n \rangle = pN.$$

Якщо два різні аналіти — A_1, A_2 — тестиються за однакових концентрацій, то або Рівн.(1.137), або експериментальні вимірювання дадуть дві величини, p_1, p_2 . Ми вважаємо, що рецептор має селективність що до A_1, A_2 , якщо $p_1 \neq p_2$ (припускається, що $p_1 > p_2$). Молекулярна селективність, μ , визначена аналогічно (1.124) як¹⁴

$$\mu = \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (1.138)$$

Первинний сигнал, $S_0(t)$ на Мал. 1.15, звичайно збільшується, якщо число n адсорбованих молекул збільшується:

$$n > n' \Rightarrow S_0 > S'_0, \quad (1.139)$$

де точна залежність S_0 від n визначається конструкцією сенсора та механізмом трансдукції. Для простоти припускається, що у випадку гравіметричного сенсора A_1 та A_2 мають одинакові молекулярні маси.

Визначимо селективність δ для цілого детектора в термінах результуючого вихідного сигналу (S на Мал. 1.15) наступним чином:

$$\delta = \ln \frac{S_1}{S_2}, \quad (1.140)$$

де S_1, S_2 є результуючими сигналами для аналітів A_1, A_2 .

Як $S_0(t)$, так і $n(t)$ містять у собі шум адсорбції-десорбції. В детекторі без порогового елемента результуючий вихідний си-

¹⁴ Це означення селективності відрізняється від вживаної в хімії специфічності асоціації, яка виражається в термінах константи дисоціації. Для аналіту A константа дисоціації визначається як $[A]_{1/2} = k_- / k_+$. Рівн.(1.137) може бути переписане за використання константи дисоціації: $p = 1/(1 + [A]_{1/2}/c)$. З цього рівняння стає очевидним те, що аналіти з різними константами дисоціації мають різні ймовірності зв'язування і навпаки. Це доводить те, що підходять обидва описи, навіть якщо числові значення селективності виражені через константи дисоціації, наприклад $\mu' = \ln([A_2]_{1/2}/[A_1]_{1/2})$, будуть відрізнятися від використаних тут. Значення μ можуть бути подані через константи дисоціації: $\mu = \ln((c + [A_2]_{1/2})/(c + [A_1]_{1/2}))$. Головна відмінність між μ' та μ полягає в тому, що остання залежить від концентрації. Це узгоджується з ситуацією в природніх системах людини, де дискримінаційна здатність звичайно залежить від концентрації.

гнал є лінійно пропорційний до середнього числа адсорбованих молекул:

$$S_i \sim p_i N, \quad i = 1, 2. \quad (1.141)$$

Це досягається або за допомогою часового усереднення, або вибором великого детектора з потужним первинним сигналом, для якого вклад флюктуацій адсорбції-десорбції є непомітним. Підставляючи (1.141) в (1.140), отримаємо для селективності звичайного детектора

$$\delta = \ln \frac{p_1 N}{p_2 N} = \mu. \quad (1.142)$$

Тому селективність детектора, в якого флюктуації усереднюються одразу після первинного сенсорного елемента або всередині нього, рівна селективності його індивідуальних адсорбуючих центрів. Пороговий елемент, ПЕ, встановлює поріг, який сигнал S_0 повинен перевищити для того, щоб пройти на наступний рівень. Перехід через поріг може траплятися час від часу завдяки флюктуаціям адсорбції-десорбції. Завдяки (1.139) поріг може характеризуватися числом N_0 молекул аналіту, які мають бути адсорбовані для того, щоб з'явився ненульовий сигнал на виході ПД. Припускається, що ПЕ є ідеальним в тому сенсі, що N_0 є точним значенням, яке не залежить від флюктуацій. Як тільки досягається N_0 , ПЕ має стандартний сталій сигнал на виході. Сигнал не залежить від точного значення $n(t)$ за умови, що воно є вище або рівне N_0 .

Позначимо через H часове вікно, протягом якого здійснюється усереднення в УЕ (Мал. 1.15), та через H_b, H_a ($H_b + H_a = H$) — сумарну кількість часу, протягом якого $n(t)$ є нижче або вище порогу, коли $0 \leq t \leq H$. Кінцевий результат, S на Мал. 1.15, повинен бути лінійно пропорційним до H_a/H . Це дає для селективності ПД:

$$\delta = \ln \frac{H_{a1}}{H_{a2}}, \quad (1.143)$$

де H_{a1}, H_{a2} відповідно береться для A_1, A_2 .

Оцінка селективності

Згідно з (1.143) необхідно оцінити загальну кількість часу, яку $n(t)$ проводить над порогом, коли $t \in [0; H]$. Це може бути зроблено додаванням довжин всіх окремих інтервалів, під час кожного з яких $n(t) \geq N_0$ неперервно. Позначимо через ζ число таких інтервалів, та через H_a^k , $1 \leq k \leq \zeta$ — довжину k -го неперервного інтервалу. Тоді

$$H_a = \sum_{1 \leq k \leq \zeta} H_a^k = \zeta \frac{1}{\zeta} \sum_{1 \leq k \leq \zeta} H_a^k = H \frac{\frac{1}{\zeta} \sum_{1 \leq k \leq \zeta} H_a^k}{\frac{1}{\zeta} \sum_{1 \leq k \leq \zeta} (H_b^k + H_a^k)},$$

де H_b^k — довжина k -го інтервалу, під час якого $n(t) < N_0$ неперервно. Якщо H разом з k_+ , c , k_- гарантують те, що ζ є великим, тоді останній вираз може бути переписаний у такому вигляді:

$$H_a = H \frac{T}{T + W}, \quad (1.144)$$

де T , W — середні довжини неперервних інтервалів, які обчислюються за формулами (1.128). Якщо розглядати два аналіти, A_1 , A_2 , тоді в (1.128) k_- та p повинно бути замінено на k_{-i} , p_i , $i = 1, 2$. Підставляючи (1.128) в Рівн.(1.144), отримаємо¹⁵:

$$H_a = H \sum_{N_0 \leq l \leq N} C_N^l p^l (1 - p)^{N-l}. \quad (1.145)$$

Розглядаючи (1.145) для двох аналітів, використаємо це в Рівн. (1.143). В результаті одержимо:

$$\delta = \ln \frac{\sum_{N_0 \leq l \leq N} C_N^l p_1^l (1 - p_1)^{N-l}}{\sum_{N_0 \leq l \leq N} C_N^l p_2^l (1 - p_2)^{N-l}}, \quad (1.146)$$

що співпадає з виразом для селективності хеморецепторного нейрона (1.130). Отже, застосувавши до (1.146) лемму з с. 66, маємо:

$$\delta > N \frac{p_0 - p_1}{1 - p_1} \mu, \quad \text{де } p_0 = N_0/N.$$

(1.147)

¹⁵Було використано наступне співвідношення: $\sum_{0 \leq l \leq N} C_N^l p^l (1 - p)^{N-l} = 1$.

Беручи до уваги те, що загальне число адсорбційних центрів, N , так само, як і N_0 , може бути дуже великим, з оцінки (1.147) стає очевидним, що δ може бути набагато більшим, ніж μ , за умови того, що дріб $(p_0 - p_1)/(1 - p_1)$ не є дуже малим. Він має бути, щонайменше, додатнім, що вимагає

$$p_0 > p_1, \quad \text{або} \quad p_1 N < N_0. \quad (1.148)$$

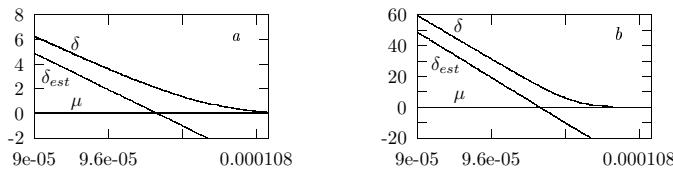
Оскільки p_1 збільшується з концентрацією — див. Рівн. (1.137) —, нерівність (1.148) може бути розглянута як обмеження на верхню границю величини концентрації c , для якої можна очікувати ефекту покращення селективності, базуючись на оцінці (1.147). Варто відзначити: коли умова (1.148) дотримується, середня кількість адсорбованого аналіту є під порогом, і перетин порогу здійснюється лише завдяки флюктуаціям.

Чисельні приклади

З оцінки (1.147) можна зрозуміти, що покращення селективності є вищим для вищих N_0 . З іншого боку, не можна вибирати N_0 як завгодно високим, тому що ПЕ на Мал. 1.15 вважається ідеальним. Якщо вибрati $N_0 = 100$, тоді ідеальність означає те, що рівень порогу в ПЕ не може коливатися більше, ніж на 1%. Аналогічно, якщо вибрati $N_0 = 10^4$, тоді пороговий рівень повинен дотримуватися з точністю 0.01%. Інакше в аргументації с. 73 слід брати до уваги шум рівня порогу, що приведе до менш обіцяючої оцінки. Інший висновок, який випливає з оцінки (1.147), означає, що чим меншою є концентрація (менше p_1) аналітів, тим кращою є дискримінація між ними. Але в цьому випадку поріг буде досягатися протягом малих проміжків часу, відведеного на вимірювання. В результаті вихідний сигнал буде дуже малим і може втратитись в УЕ-елементі. Природньо вимагати, щоб вихідний сигнал для більш афінного аналіту був вищим, аніж 10% максимального вихідного сигналу, який виробляється ПД, коли $n(t) \geq N_0$ весь час. Узявши рівняння (1.145), прийдемо до наступ-

	k_+	k_-
	(1/(s·M))	(1/s)
A_1	1000	1000
A_2	1000	1050

Табл. 1.1. Константи швидкостей, що використовуються в прикладах
Табл. 1.2 та в Мал. 1.16



Мал. 1.16. Залежності селективності від концентрацій для прикладів з Табл. 1.2. Концентрацію (вісь ОХ) подано в М. Значення N , N_0 в a та b відповідають першому і другому рядкам Табл. 1.2. δ_{est} відповідає правій частині нерівності (1.147).

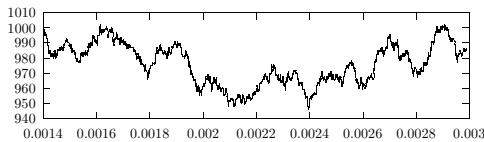
пного обмеження:

$$r_1 = \sum_{N_0 \leq l \leq N} C_N^l p_1^l (1 - p_1)^{N-l} > 0.1. \quad (1.149)$$

Ще одне обмеження отримується з припущення великою ζ , яке було зроблене для виведення рівняння (1.144). Якщо час вимірювання, H , буде достатньо короткий, наприклад $H = 1$ с, тоді середня частота перетинання порогу повинна бути достатньо високою для того, щоб отримати, наприклад, $\zeta > 1000$. Цього можна досягти, якщо середні тривалості неперервного перебування над та під порогом достатньо короткі. Якщо $\overline{H_{abc}} = T + W$, то

	N	N_0	c	μ	δ	r_1	$\overline{H_{abc}}$
	(M)				(s)		
Прикл. 1	10^7	10^3	$9.6 \cdot 10^{-5}$	0.05	3.63	0.1	$1.8 \cdot 10^{-4}$
Прикл. 2	10^8	10^4	$9.9 \cdot 10^{-5}$	0.05	18	0.16	$4 \cdot 10^{-5}$

Табл. 1.2. Чисельні приклади покращеної селективності. Константи швидкостей для аналітів показано в Табл. 1.1. δ вираховано за допомогою точного виразу (1.146), r_1 — означене в рівнянні (1.149).



Мал. 1.17. Короткий сегмент траекторії $n(t)$, змодельованої чисельно для прикладу 1 Табл. 1.2. Час (вісь ОХ) подано в секундах.

рівняння (1.128) дають

$$\boxed{\overline{H_{abc}} = \left(k_- N_0 C_N^{N_0} p^{N_0} (1-p)^{N-N_0} \right)^{-1}.}$$

Значення $\zeta > 1000$ може бути забезпечене нерівністю

$$H/\overline{H_{abc}} > 1000,$$

або, вибираючи $H = 1$ с, —

$$\overline{H_{abc}} < 0.001 \text{ s}.$$

Два приклади, що задовольняють ці обмеження, показано в Табл. 1.2. Залежності μ , δ від концентрації та хід оцінки (1.147) показані на Мал. 1.16. Короткий відрізок траекторії $n(t)$ показано на Мал. 1.17.

Розділ 2

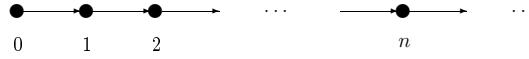
Системи зі зліченим числом станів

2.1 Інтегральний пуассонівський лічильник

Розглянемо систему, яка складається з лічильника, який одержує імпульси в випадкові моменти часу¹. Лічильник рахує імпульси і показує повну кількість імпульсів, одержану ним з моменту ввімкнення. Показання лічильника називається його станом. Вважається, що за обмежений проміжок часу лічильник одержує обмежену кількість імпульсів і неможливо одержати два і більше імпульсів одночасно². В цьому випадку множина станів лічильника складається з натуральних чисел $\{0, 1, \dots\}$, а його граф переходів зображене на Мал. 2.1. Отже, стан лічильника змінюється в часі випадковим чином. Відповідний процес появі

¹Звичайно в теорії стохастичних процесів вживають термін "подія". Ми будемо вживати термін "імпульс", маючи на увазі подальше застосування до нейронних систем, де елементарною подією є імпульс.

²Остання умова визначає ординарний стохастичний процес.



Мал. 2.1. Граф переходів ІПЛ

імпульсів у випадкові моменти часу називається/описується пуссонівським випадковим процесом, якщо кількість імпульсів, одержаних лічильником за певний проміжок часу $[t'; t]$, не залежить від того, як розподілені імпульси в моменти, що передують t' , а швидкості переходів між сусідніми станами лічильника мають наступний вигляд:

$$r_n^+ = \lambda, \quad r_n^- = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

Всі інші швидкості переходів рівні нулю. Описаний вище лічильник будемо називати інтегральним пуссонівським лічильником (ІПЛ). Балансне рівняння (1.16) для ймовірностей переходів між станами лічильника одержує наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} p(n, t | n', t') = -\lambda p(n, t | n', t') + \lambda p(n - 1, t | n', t'), \quad (2.2)$$

де $n \geq n'$, $t \geq t'$ і $n < n' \Rightarrow p(n, t | n', t') = 0$. Розв'язок рівняння (2.2) має наступний вигляд

$$p(n, t | n', t') = e^{-\lambda(t-t')} \frac{(\lambda(t-t'))^{n-n'}}{(n-n')!}, \quad (2.3)$$

в чому легко пересвідчитись прямою підстановкою. З означення пуссонівського процесу і вигляду формул (2.3) випливає, що пуссонівський процес є стаціонарним марківським процесом. Ймовірність, $P_t(n)$, що за проміжок часу довжиною t буде одержано точно n імпульсів, одержується з (2.3):

$$P_t(n) = p(n, t | 0, 0) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

Параметр λ називається інтенсивністю пуассонівського процесу. Він має змістом середню частоту появи імпульсів. Дійсно, середнє число імпульсів, \bar{n}_t , яке одержується лічильником за час t , обчислюється за формулою

$$\bar{n}_t = \sum_{n \geq 0} n P_t(n) = \lambda t. \quad (2.5)$$

Звідси виходить, що середня часова відстань між двома послідовними імпульсами дорівнює $1/\lambda$.

Для подальшого буде корисно знайти ймовірність того, що часова відстань між l -м і $l + N$ -м імпульсами дорівнює певній величині t з точністю dt , де l і N — довільні натуральні числа. Виберемо початок відліку часу в момент приходу l -го імпульса. Тоді для реалізації відповідної події необхідно і досить, щоб на інтервалі $[0; t]$ було одержано $N - 1$ імпульсів і один імпульс прийшов в момент t з точністю dt . Потрібний вираз, як випливає з (2.1) і (2.4), має наступний вигляд:

$$e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{N-1}}{(N-1)!} \lambda dt. \quad (2.6)$$

При $\lambda = 1$ розподіл (2.37) називається гамма-розподілом (γ -розподілом) порядку N . Ймовірність того, що часова відстань між l -м і $l + N$ -м імпульсами не менша від певної величини τ , одержується інтегруванням цього виразу:

$$p_{\lambda, N}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{N-1}}{(N-1)!} \lambda dt = e^{-\lambda \tau} \sum_{0 \leq n \leq N-1} \frac{(\lambda \tau)^n}{n!}. \quad (2.7)$$

Відповідно, ймовірність того, що часова відстань між l -м і $l + N$ -м імпульсами не перевищує τ , дається виразом

$$1 - p_{\lambda, N}(\tau) = 1 - e^{-\lambda \tau} \sum_{0 \leq n \leq N-1} \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} = e^{-\lambda \tau} \sum_{n \geq N} \frac{(\lambda \tau)^n}{n!}. \quad (2.8)$$

Зокрема, ймовірність того, що інтервал між двома сусідніми імпульсами не перевищує τ , дорівнює τ з точністю $d\tau$, або більший

від τ , дається наступними виразами, відповідно:

$$\boxed{1 - e^{-\lambda \tau}}, \quad (2.9)$$

$$\boxed{P(\tau) d\tau = e^{-\lambda \tau} \lambda d\tau}, \quad (2.10)$$

$$\boxed{e^{-\lambda \tau}}. \quad (2.11)$$

Вираз (2.10) дозволяє відновити всі формули (2.4). Наприклад, для знаходження $P_t(0)$ слід знайти ймовірність того, що перший імпульс з'явиться через час t або пізніше після включення. Ця ймовірність дається інтегралом

$$P_t(0) = \int_t^\infty P(\tau) d\tau = e^{-\lambda t}.$$

Аналогічно, для знаходження $P_t(1)$ слід обчислити ймовірність того, що перший імпульс з'явиться за час $\tau_1 < t$, а наступний — за час $\tau_2 > t - \tau_1$. З урахуванням незалежності міжімпульсних інтервалів, ця ймовірність дається інтегралом

$$P_t(1) = \int_0^t d\tau_1 \int_{t-\tau_1}^\infty d\tau_2 P(\tau_1) P(\tau_2) = e^{-\lambda t} \lambda t.$$

Аналогічно, для знаходження $P_t(2)$ слід обчислити ймовірність того, що перший імпульс з'явиться за час $\tau_1 < t$, наступний — за час $\tau_2 < t - \tau_1$, а наступний — за час $\tau_3 > t - \tau_1 - \tau_2$. Ця ймовірність дається інтегралом

$$P_t(2) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{t-\tau_1} d\tau_2 \int_{t-\tau_1-\tau_2}^\infty d\tau_3 P(\tau_1) P(\tau_2) P(\tau_3) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^2 / 2.$$

Отже, формула (2.10) достатня для задання пуассонівського процесу.

Оскільки процес появи імпульсів — випадковий, то в різних спостереженнях протягом часу t можна одержати різне число імпульсів n_t , яке задовільняє умову $n_t \geq 0$. Для того, щоб охарактеризувати ступінь розкиданості n_t при здійсненні декількох

спостережень тривалістю t кожне, вживають дисперсію, σ_t^2 , чи-сла імпульсів, одержаних за час t :

$$\sigma_t^2 = \overline{(n_t - \bar{n}_t)^2} = \sum_{n \geq 0} (n_t - \bar{n}_t)^2 P_t(n) = \lambda t.$$

Отже, для пуассонівського процесу $\sigma_t^2 = \bar{n}_t$.

2.2 Інформація інтегрального пуассонівського лічильника

Якщо пуассонівський лічильник ввімкнено протягом часу t , то його кінцевий стан може виявитися нулем або будь-яким натуральним числом. Отже, до виконання спостереження його результат був невизначенім. При цьому невизначеність не є повною, оскільки відомі ймовірності окремих результатів (формули (2.4)). Разом із тим, після проведення спостереження стан лічильника стає відомим однозначно. В цьому сенсі кажуть, що в результаті спостереження за пуассонівським процесом одержано інформацію. Повна інформація, яку хтось може одержати в результаті спостереження за стохастичним процесом на проміжку $[0; t]$, — це не тільки загальна кількість імпульсів, але й моменти їх появи. Оскільки інтегральний пуассонівський лічильник не має достатньої внутрішньої структури для сприйняття (відображення) моментів появи, то інформація, одержана ним, не залежить від цих моментів, а визначається тільки ймовірностями одержання певних чисел імпульсів за час t .

Кількість одержаної інформації I_t в бітах обчислюється за формулою Шеннона [12], яка в застосуванні до ПЛ набуває наступного вигляду:

$$I_t = - \sum_{n \geq 0} P_t(n) \log_2 P_t(n), \quad (2.12)$$

де $P_t(n)$ дается формулами (2.4). Користуючись мовою статистичної механіки, можна сказати, що $-I_t$ дає ентропію множини

(ансамблю) можливих результатів спостереження. Після проведення спостереження одержується один конкретний результат, і ентропія обертається в нуль³. Саме тому інколи для кількості інформації вживається термін “негентропія” [13].

Природно, якщо при збільшенні тривалості спостереження буде збільшуватись і одержана кількість інформації. В цьому розділі нашою метою буде визначити, як швидко збільшується кількість інформації, коли довжина інтервалу спостереження за пуссонівським процесом прямує до безмежності. Іншими словами, ми цікавимось асимптотичною поведінкою функції I_t . Спочатку слід пересвідчитись, що ряд в формулі (2.12) збігається для будь-яких значень λt . Елементарними перетвореннями ряд (2.12) приводиться до наступного вигляду:

$$I_t = \frac{1}{\ln 2} \left(\lambda t(1 - \ln \lambda t) + \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \ln(n!) \right). \quad (2.13)$$

Для доведення збіжності ряду в (2.13) використаємо ознаку Д'Аламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\lambda t)^n}{n!} \ln(n!)}{\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \ln((n+1)!)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\lambda t} \frac{\ln(n!)}{\ln(n!) + \ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\lambda t} \frac{1}{1 + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)}} = \infty. \end{aligned}$$

Було використано границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)} = 0$, яка випливає з нерівності $n! > 2^n$, якщо $n \geq 4$. Отже, визначена формулою (2.12) кількість інформації існує для будь-якого значення λt .

Введемо наступне позначення $\lambda t = X$. Асимптотичну поведінку функції I_t тоді можна подати в термінах X , тобто середньої

³ Відзначимо, що в даній постановці питання кількість одержаної в результаті конкретного спостереження інформації не залежить не тільки від того як окремі імпульси розташовані в часі, але і від того, скільки їх всього одержано за час t у даному конкретному спостереженні.

кількості імпульсів, які одержуються за час спостереження, в такій формі:

$$\boxed{I_t = \log_2 \sqrt{2\pi X} + \eta(X) \log_2 e, \quad X = \lambda t,} \quad (2.14)$$

де функція $\eta(t)$ при достатньо великих X задоволяє наступну оцінку:

$$O(1/X) \leq \eta(X) \leq 1 + O(1/X).$$

Більш точне формулювання твердження (2.14) і його доведення внесено в Додаток В.1. З (2.14) виходить: середня кількість інформації на один імпульс, яка одержується при спостереженні за пуассонівським процесом, прямує до нуля, коли час неперервного спостереження прямує до безмежності:

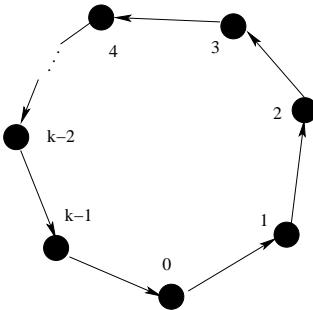
$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_t/t = 0. \quad (2.15)$$

Ця ситуація принциповим чином відрізняється від ситуації при передачі текстових файлів [12], коли передана інформація лінійно зростає з кількістю переданих символів і замість нуля в (2.15) буде одержано додатну величину.

2.3 Циклічний пуассонівський лічильник

Розглянемо систему, набір станів якої скінчений⁴: $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, а граф переходів зображено на Мал. 2.2. Таку систему можна назвати циклічним лічильником. Нехай лічильник перебуває під впливом пуассонівського процесу в тому сенсі, що кожен імпульс пуассонівського процесу викликає переход циклічного лічильника в сусідній стан згідно з графом переходів. Такий лічильник будемо називати циклічним пуассонівським лічильником (ЦПЛ).

⁴Система розглядається в цьому розділі, оскільки має безпосереднє відношення до системи зі зліченним числом станів.



Мал. 2.2. Граф переходів ЦПЛ

ЦПЛ породжує з пуассонівського процесу n_t новий стохастичний процес n_t^c , де $0 \leq n_t^c < k$ для будь-якого t . Цей процес буде марківським, оскільки перехід ЦПЛ з стану n' в стан n на проміжку $[t'; t]$ залежить від того, скільки імпульсів за цей проміжок одержано від відповідного пуассонівського процесу. Останнє ж залежить тільки від величини $t - t'$. Отже, знання станів ЦПЛ в моменти, які передують t' , не впливає на прогноз його стану в момент t , якщо в момент t' його стан відомий. Таким чином, стохастичний процес, породжений станами ЦПЛ, повністю визначається набором переходних імовірностей

$$p^c(n, t | n', t'), \quad t' \leq t, \quad n, n' \in \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}.$$

Швидкості переходів для ЦПЛ даються виразом

$$r_l^+ = \lambda, \quad l = 0, 1, \dots, k - 1,$$

де λ — інтенсивність відповідного пуассонівського процесу. Балансне рівняння для ЦПЛ має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p^c(n, t | n', t') &= \\ &= -\lambda p^c(n, t | n', t') + \lambda p^c(n-1, t | n', t'), \quad (2.16) \end{aligned}$$

де $0 \leq n, n' < k, t' \leq t$, і $n - l$ означає віднімання по модулю k : якщо $n, l \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ і $n-l \geq 0$, то $n - l = n - l$, якщо ж $n - l < 0$, то $n - l = n - l + k$. Розв'язок рівняння (1) має такий вигляд:

$$p^c(n, t | n', t') = e^{-\lambda(t-t')} \sum_{m \geq 0} \frac{(\lambda(t-t'))^{n - n' + km}}{(n - n' + km)!}, \quad (2.17)$$

в чому можна пересвідчитись прямую підстановкою (2.17) у (2.16). Наприклад, для $n = n'$

$$p^c(n, t | n, t') = e^{-\lambda(t-t')} + e^{-\lambda(t-t')} \sum_{l \geq 1} \frac{(\lambda(t-t'))^{kl}}{(kl)!},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p^c(n, t | n, t') &= \\ &= -\lambda p^c(n, t | n, t') + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \sum_{l \geq 1} \frac{(\lambda(t-t'))^{kl-1}}{(kl-1)!} = \\ &= -\lambda p^c(n, t | n, t') + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \sum_{l \geq 1} \frac{(\lambda(t-t'))^{k-1+k(l-1)}}{(k-1+k(l-1))!} = \\ &= -\lambda p^c(n, t | n, t') + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \sum_{l \geq 0} \frac{(\lambda(t-t'))^{k-1+kl}}{(k-1+kl)!} = \\ &= -\lambda p^c(n, t | n, t') + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \sum_{l \geq 0} \frac{(\lambda(t-t'))^{(n-1)-n+kl}}{((n-1)-n+kl)!} = \\ &= -\lambda p^c(n, t | n, t') + \lambda p^c(n - 1, t | n, t'). \end{aligned}$$

Тут враховано, що $(n - 1) - n = k - 1$. Аналогічно перевіряється випадок $n \neq n'$. При цьому слід врахувати наступне твердження: $n - n' - 1 = (n - 1) - n'$, яке можна перевірити окремо для $n < n'$ і $n > n'$.

2.4 Інформація циклічного пуассонівського лічильника

Для оцінки, скільки інформації може одержати ЦПЛ від відповідного пуассонівського процесу, введемо наступні ймовірності:

$$P_t^c(n) = p^c(n, t | 0, 0), \quad 0 \leq n < k.$$

Перехідні ймовірності (2.17) одержуються з них за формулами

$$p^c(n, t | n', t') = P_{t-t'}^c(n - \frac{k}{n'}). \quad (2.18)$$

Якщо ЦПЛ вмикається при $t = 0$ в стані 0, то кількість інформації в бітах, яку він одержує в результаті роботи протягом часу t , обчислюється за формулою

$$I_t^c = - \sum_{0 \leq m < k} P_t^c(m) \log_2 P_t^c(m). \quad (2.19)$$

Величини $P_t^c(m)$, де $t > 0$, задовольняють наступні обмеження:

$$\sum_{0 \leq m < k} P_t^c(m) = 1, \quad 0 < P_t^c(m) < 1, \quad m = 0, 1, \dots, k - 1. \quad (2.20)$$

Досліджуючи I_t^c як функцію k змінних $P_t^c(m)$ на умовний екстремум при умовах (2.20), доходимо висновку:

$$0 < I_t^c \leq \log_2 k, \quad (2.21)$$

причому найбільше значення досягається при $P_t^c(m) = 1/k$ для всіх m . Отже, для ЦПЛ інформація, одержана від пуассонівського процесу, обмежена величиною $\log_2 k$ незалежно від тривалості спостереження. Така відмінність від ПЛ зрозуміла, оскільки при переході до стану 0 ЦПЛ втрачає інформацію, одержану в попередньому циклі⁵. Середня інформація на один одержаний імпульс прямує до нуля як $1/t$, коли $t \rightarrow \infty$.

⁵Точніше, стан ЦПЛ не зберігає інформації про кількість пройдених ним повних циклів.

Зауважимо, що при $t \rightarrow \infty$ величини $P_t^c(m)$ набувають своїх стаціонарних значень, рівних $1/k$. Для доведення цього твердження слід довести співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^c(n) = \lim_{X \rightarrow \infty} e^{-X} \sum_{m \geq 0} \frac{X^{km+n}}{(km+n)!} = \frac{1}{k} \quad (2.22)$$

для кожного $n = 0, 1, \dots, k-1$. Доведення останнього базується на наступному твердженні.

Нехай $f(i)$ — періодична функція натурального аргументу, i , з періодом k , т.т. $f(i+k) = f(i)$ для всіх $i = 1, 2, 3, \dots$. Тоді

$$\lim_{X \rightarrow \infty} e^{-X} \sum_{i \geq 0} \frac{X^i}{i!} f(i) = \frac{1}{k} \sum_{0 \leq i < k} f(i). \quad (2.23)$$

Доведення останнього твердження винесено в Додаток В.2. Для доведення (2.22) на основі (2.23), задавши деяке n , $0 \leq n < k$, розглянемо наступну періодичну функцію f : $f(i) = 1$, якщо остача від ділення i на k дорівнює n і $f(i) = 0$ для всіх інших значень i . Або

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = n \pmod{k} \\ 0, & \text{якщо } i \neq n \pmod{k}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Функція $f(i)$, означена в (2.24), — періодична. Співвідношення (2.22) переписується з використанням $f(i)$ у такому вигляді:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^c(n) = \lim_{X \rightarrow \infty} e^{-X} \sum_{i \geq 0} \frac{X^i}{i!} f(i) = \frac{1}{k},$$

де враховано (2.23). Отже, в стаціональному режимі однократне спостереження за станом ЦПЛ дає інформацію $\log_2 k$.

2.5 ЦПЛ + інтегральний лічильник

Розглянемо циклічний пуассонівський лічильник із довжиною циклу k і інтенсивністю λ , який щоразу при переході з стану

l_3	l_2	l_1	
3	3	1	$e^{-\lambda(t_3-t_0)} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^2}{2!} \lambda(t_1-t_0)$
3	3	0	$e^{-\lambda(t_3-t_0)} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^3}{3!}$
3	2	1	$e^{-\lambda(t_3-t_0)} \lambda(t_3-t_2) \lambda(t_2-t_1) \lambda(t_1-t_0)$
3	2	0	$e^{-\lambda(t_3-t_0)} \lambda(t_3-t_2) \frac{(\lambda(t_2-t_1))^2}{2!}$
2	2	1	$e^{-\lambda(t_3-t_0)} \lambda(t_2-t_1) \lambda(t_1-t_0)$
2	2	0	$e^{-\lambda(t_3-t_0)} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^2}{2!}$

Табл. 2.1. Окремі доданки в формулі (2.27)

$k - 1$ в стан 0 посилає вихідний імпульс. Ці вихідні імпульси рахуються інтегральним лічильником. Таким чином утворюється новий стохастичний процес зміни станів інтегрального лічильника, іншими словами — процес одержання інтегральним лічильником імпульсів від ЦПЛ. Отже, утворюється нова система, стани якої характеризуються кількістю імпульсів, накопичених в інтегральному лічильнику. Для скорочення будемо позначати цю систему як ЦПЛІ. Граф переходів такої системи співпадає з графом для ПЛ. Разом з тим, оскільки в стані ЦПЛІ відсутня інформація про стан відповідного ЦПЛ, який впливає на шанси переходу ЦПЛІ в наступний стан, то можна очікувати порушення властивості марковості для ЦПЛІ. Пересвідчимось в цьому. Нехай $p^{ci}(n_m, t_m; \dots; n_1, t_1; n_0, t_0)$ позначає багаточасові функції розподілу ймовірностей для ЦПЛІ. Згідно з означенням

$$\begin{aligned} p^{ci}(n_m, t_m; \dots; n_1, t_1; n_0, t_0) &= \\ &= \sum_{n_m k \leq l_m < (n_m + 1)k} \dots \sum_{n_0 k \leq l_0 < (n_0 + 1)k} p(l_m, t_m; \dots; l_0, t_0), \end{aligned} \quad (2.25)$$

де $p(l_m, t_m; \dots; l_0, t_0)$ — багаточасові функції розподілу на вході ЦПЛІ. Останні, завдяки марковості вхідного пуассонівського процесу, можна подати через перехідні ймовірності, як у формулі (1.6). Самі ж перехідні ймовірності даються виразами (2.3). Розглянемо, наприклад, функцію вигляду $p^{ci}(1, t_3; 1, t_2; 0, t_1; 0, t_0)$. Рівняння (2.25) дає для неї при $k = 2$

$$p^{ci}(1, t_3; 1, t_2; 0, t_1; 0, t_0) = \quad (2.26)$$

$$= \sum_{\substack{2 \leq l_3 < 4 \\ 2 \leq l_2 < 4 \\ 0 \leq l_1 < 2 \\ 0 \leq l_0 < 2}} p(l_3, t_3 | l_2, t_2) p(l_2, t_2 | l_1, t_1) p(l_1, t_1 | l_0, t_0) p(l_0, t_0),$$

де перехідні ймовірності даються формулами (2.3), а відносно початкового розподілу слід зробити якесь припущення. Найпростіше вважати, що t_0 — це момент початку рахунку на вході ЦПЛІ. Тоді $p(0, t_0) = 1$, $p(l, t_0) = 0$ при $l \geq 1$. В цьому випадку з (2.26) маємо:

$$p^{ci}(1, t_3; 1, t_2; 0, t_1; 0, t_0) = \quad (2.27)$$

$$= \sum_{\substack{2 \leq l_3 < 4 \\ 2 \leq l_2 < 4 \\ 0 \leq l_1 < 2}} p(l_3, t_3 | l_2, t_2) p(l_2, t_2 | l_1, t_1) p(l_1, t_1 | 0, t_0),$$

причому $l_1 \leq l_2 \leq l_3$. Підставивши (2.3) в (2.27), маємо (див. Табл. 2.1):

$$\begin{aligned} p^{ci}(1, t_3; 1, t_2; 0, t_1; 0, t_0) &= e^{-\lambda(t_3-t_0)} \frac{\lambda^2(t_2-t_1)}{3!} \times \\ &\times (6\lambda(t_3-t_2)(t_1-t_0) + 3\lambda(t_3-t_2)(t_2-t_1) + 3\lambda(t_2-t_1)(t_1-t_0) + \\ &+ \lambda(t_2-t_1)^2 + 6(t_1-t_0) + 3(t_2-t_1)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

l_2	l_1	
3	1	$e^{-\lambda(t_2-t_0)} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^2}{2!} \lambda(t_1-t_0)$
3	0	$e^{-\lambda(t_2-t_0)} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^3}{3!}$
2	1	$e^{-\lambda(t_2-t_0)} \lambda(t_2-t_1) \lambda(t_1-t_0)$
2	0	$e^{-\lambda(t_2-t_0)} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^2}{2!}$

Табл. 2.2. Окремі доданки в формулі (2.29)

Аналогічно (див. Табл.2.2):

$$\begin{aligned}
 p^{ci}(1, t_2; 0, t_1; 0, t_0) &= \sum_{\substack{2 \leq l_2 \leq 4 \\ 0 \leq l_1 \leq 2}} p(l_2, t_2 | l_1, t_1) p(l_1, t_1 | 0, t_0) = \\
 &= e^{-\lambda(t_2-t_0)} \frac{\lambda^2(t_2-t_1)}{3!} (3\lambda(t_2-t_1)(t_1-t_0) + \\
 &\quad + \lambda(t_2-t_1)^2 + 6(t_1-t_0) + 3(t_2-t_1)). \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

З (2.28), (2.29) маємо:

$$\begin{aligned}
 p^{ci}(1, t_3 | 1, t_2; 0, t_1; 0, t_0) &= \frac{p^{ci}(1, t_3; 1, t_2; 0, t_1; 0, t_0)}{p^{ci}(1, t_2; 0, t_1; 0, t_0)} = \\
 &= e^{-\lambda(t_3-t_2)} \left(1 + 3\lambda(t_3-t_2) \frac{1}{3 + \frac{\lambda(t_2-t_1)(t_2-t_0+2(t_1-t_0))}{t_2+t_1-2t_0}} \right).
 \end{aligned}$$

Останній вираз має явну залежність від t_1 і t_0 , отже, умова марковості (1.5) тут порушується. Це і зрозуміло, оскільки опис стану системи виключно в термінах вихідних імпульсів ЦПЛІ не враховує внутрішній стан ЦПЛ, який істотнім чином впливає на вихідну активність ЦПЛІ. Інформація про стани ЦПЛІ в попередні моменти, (t_1, t_0) , може зменшити невизначеність стану ЦПЛ у момент t_2 (порівняти з приміткою на с. 15).

Обчислимо середню кількість імпульсів на виході ЦПЛІ на інтервалі $[t_1, t_0]$ в стаціонарному режимі, тобто процес розпочався набагато раніше від t_0 . Ймовірність того, що показання ЦПЛІ на цьому проміжку зміняться від n до $n + \Delta$, дается формулою

$$p^{ci}(n + \Delta, t_1; n, t_0) = \sum_{\substack{nk \leq l_0 < (n+1)k \\ (n+\Delta)k \leq l_1 < (n+\Delta+1)k}} p(l_1, t_1 | l_0, t_0) p(l_0, t_0), \quad (2.30)$$

де $p(l_1, t_1 | l_0, t_0)$ даються формулами (2.3). Ймовірності $p(l_0, t_0)$ задовольняють умову

$$\sum_{nk \leq l_0 < (n+1)k} p(l_0, t_0) = 1.$$

Явні величини $p(l_0, t_0)$ залежать від t_0 і наближаються до своїх стаціонарних значень, як у формулі (2.23). Якщо процес вийшов на стаціонарний режим, то $p(l_0, t_0) = 1/k$. Позначимо $j_0 = l_0 - nk$, $j_1 = l_1 - (n + \Delta)k$ і покладемо $t_0 = 0$, $t_1 - t_0 = t$. Тоді (2.30) перепишеться наступним чином:

$$p^{ci}(\Delta, t) = \frac{1}{k} \sum_{\substack{0 \leq j_0 < k \\ 0 \leq j_1 < k}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k\Delta+j_1-j_0}}{(k\Delta+j_1-j_0)!}, \quad (2.31)$$

де $p^{ci}(\Delta, t) = p^{ci}(n + \Delta, t; n, 0)$, n — довільне. Отже, в стаціонарному режимі ймовірність одержати певну кількість імпульсів Δ за певний інтервал залежить тільки від Δ і довжини інтервалу. Останній вираз можна також подати в такому вигляді:

$$p^{ci}(\Delta, t) = \frac{1}{k} e^{-\lambda t} \sum_{\delta=1-k}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{k\Delta+\delta}}{(k\Delta+\delta)!} (k - |\delta|).$$

Середня кількість імпульсів на виході ЦПЛІ в стаціонарному режимі за час t обчислюється наступним чином:

$$\overline{\Delta}_t = \frac{1}{k} e^{-\lambda t} \sum_{\Delta \geq 0} \Delta \sum_{\delta=1-k}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{k\Delta+\delta}}{(k\Delta+\delta)!} (k - |\delta|) = \frac{\lambda}{k} t. \quad (2.32)$$

Для доведення останньої рівності слід обчислити вигляд доданка з $(\lambda t)^m$, де $m = 1, 2, \dots$ в подвійній суммі. Нехай $m = kl + c$, де l і c цілі, $0 < c < k$. Тоді $\Delta = l + \frac{c-\delta}{k}$. Найменше ціле значення $\frac{c-\delta}{k}$ дорівнює 0 при $\delta = c$, найбільше — 1 при $\delta = c - k$. Отже, для індексів (Δ, δ) є дві можливості: $\Delta = l, \delta = c$ і $\Delta = l + 1, \delta = c - k$. Відповідні два доданки мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda t)^{kl+c}}{(kl+c)!} l(k-c) + \frac{(\lambda t)^{kl+c}}{(kl+c)!} (l+1)(k-|c-k|) = \\ & = \frac{(\lambda t)^{kl+c}}{(kl+c)!} l(k-c) + \frac{(\lambda t)^{kl+c}}{(kl+c)!} (l+1)c = (\lambda t) \frac{(\lambda t)^{kl+c-1}}{(kl+c-1)!}. \end{aligned}$$

Якщо $m = kl$, то є лише один набір індексів: $\Delta = l, \delta = 0$. Відповідний доданок має наступний вигляд:

$$\frac{(\lambda t)^{kl}}{(kl)!} lk = (\lambda t) \frac{(\lambda t)^{kl-1}}{(kl-1)!}.$$

Отже, подвійна сумма згортається до $(\lambda t) e^{(\lambda t)}$, що доводить (2.32). Висновок (2.32) можна одержати і з більш елементарних міркувань, якщо врахувати, що для одержання одного імпульсу на вихіді ЦПЛІ на його вхід має прийти k імпульсів. Аналогічно можна прийти до висновку, що середній інтервал між вихідними імпульсами складає k/λ . Цей самий висновок можна отримати іншим шляхом, корисним для подальшого матеріалу. Згідно з означенням, середнє число $\overline{N(T)}$ вихідних імпульсів ЦПЛІ за певний проміжок часу T визначається наступним чином:

$$\overline{N(T)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} N_i(T), \quad (2.33)$$

де i нумерує випробування, а $N_i(T)$ — число імпульсів, яке одержується в i -му випробуванні. Проміжок T можна розбити на частини dt_l , довжиною T/L кожна. Тоді

$$N_i(T) = \sum_{1 \leq l \leq L} N_i(dt_l), \quad (2.34)$$

де $N_i(dt_l)$ — число імпульсів, одержане на інтервалі dt_l в i -му випробуванні. Підставивши (2.34) в (2.33), одержимо

$$\overline{N(T)} = \sum_{1 \leq l \leq L} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} N_i(dt_l). \quad (2.35)$$

Вираз

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i \leq M} N_i(dt_l) = p(dt_l)$$

дає середню кількість імпульсів в інтервалі dt_l , або, при малому dt_l , ймовірність одержати вихідний імпульс в цьому інтервалі. Ця ймовірність дорівнює ймовірності одержати в dt_l вхідний імпульс із номером, кратним k . Ймовірність одержати в dt_l вхідний імпульс дается виразом $\lambda dt_l + o(dt_l)$, де λ — інтенсивність вхідного пуассонівського процесу. Припускаємо, що ЦПЛІ вийшов на стаціонарний режим. Тоді ймовірність того, що вхідний імпульс має номер, кратний k , дорівнює $1/k$ (див. (2.22)). Відповідно,

$$p(dt_l) = \frac{\lambda}{k} \frac{T}{L} + o(T/L).$$

Підставивши це в (2.35), одержимо:

$$\overline{N(T)} = \sum_{1 \leq l \leq L} \left(\frac{\lambda}{k} \frac{T}{L} + o(T/L) \right) = L \frac{\lambda}{k} \frac{T}{L} + L o(T/L),$$

або

$$\overline{N(T)} = \frac{\lambda}{k} T + L o(T/L).$$

Оскільки останнє співвідношення справедливе при будь-якому L , то спрямувавши $L \rightarrow \infty$, одержимо:

$$\overline{N(T)} = \overline{\lambda_k} T, \quad \text{де } \overline{\lambda_k} = \lambda/k. \quad (2.36)$$

2.6 Розподіл міжімпульсних інтервалів ЦПЛІ

Незважаючи на те, що поява вихідних імпульсів ЦПЛІ описується немарківським стохастичним процесом, його міжімпульсні інтервали незалежні так само, як це має місце для пуассонівського процесу. Дійсно, в момент t_0 появі вихідного імпульсу ЦПЛІ переходить у стандартний стан — відповідний ЦПЛ має стан 0. Отже, у вказаний момент внутрішній стан ЦПЛІ стає відомим. Поява наступного вихідного імпульсу тоді повністю визначається поведінкою вихідного пуассонівського процесу для моментів $t > t_0$. Ймовірність одержати наступний вихідний імпульс через час t дорівнює ймовірності одержати на вході ЦПЛІ на інтервалі $]t_0, t]$ $k - 1$ імпульс і ще один у момент t . Ця ймовірність дается формулою (2.6). Отже, функція розподілу міжімпульсних інтервалів на виході ЦПЛІ має наступний вигляд:

$$P_k(t) dt = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda dt. \quad (2.37)$$

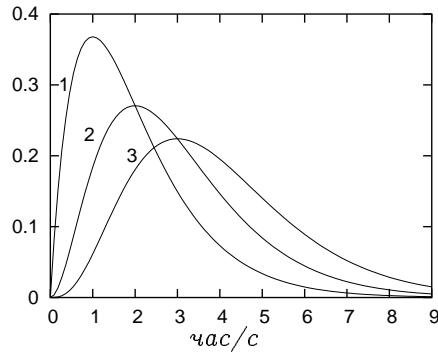
За допомогою останньої формулі можна ще раз знайти середній міжімпульсний інтервал W_k :

$$W_k = \int_0^\infty P_k(t) t dt = \frac{k}{\lambda},$$

що узгоджується з (2.32), (2.36). Приклади графіків функції $P_k(t)$ подано на Мал. 2.3. При $\lambda = 1$ розподіл (2.37) називається ґамма-розподілом (γ -розподілом) порядку k .

2.7 Інформація ЦПЛІ

Для спрощення формул будемо вважати, що в нульовий момент часу ЦПЛ перебуває в стані 0: $p(0, 0) = 1$. Тоді замість (2.31)



Мал. 2.3. Графік функції $P_k(t)$ при $\lambda = 1 \text{ c}^{-1}$. 1: $k = 2$, 2: $k = 3$, 3: $k = 4$.

одержимо:

$$p^{ci}(n, t) = e^{-X} \sum_{0 \leq j < k} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!}, \quad X = \lambda t. \quad (2.38)$$

Кількість інформації, яка отримується при спостереженні за ЦПЛІ протягом часу t , діється, аналогічно (2.12), наступною формулою:

$$I_t^{ci} = - \sum_{n \geq 0} p^{ci}(n, t) \log_2 p^{ci}(n, t). \quad (2.39)$$

Запишемо означення інформації інтегрального пуассонівського лічильника (2.12) в наступному вигляді:

$$I_t \ln 2 = -e^{-X} \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq j < k} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln e^{-X} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!}$$

і розглянемо різницю

$$\begin{aligned} (I_t^{ci} - I_t) \ln 2 &= \\ &= -e^{-X} \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq j < k} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \sum_{0 \leq i < k} \frac{X^{i-j} (nk+j)!}{(nk+i)!}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Нас цікавить асимптотика виразу (2.40), коли X прямує до безмежності, оскільки вона характеризує асимптотичну поведінку I_t^{ci} . Зауважимо, що при дослідженні асимптотики можна відкинути будь-яку скінченну (наперед фіксовану) сума доданків в (2.40), оскільки, завдяки множнику e^{-X} , їх внесок прямує до нуля. Також для спрощення формул, на відміну від Додатку В.1, ми не будемо зберігати доданки, які прямають до нуля при $X \rightarrow \infty$. В Додатку В.3 доведено справедливість наступної оцінки:

$$-k + 1 \leq (I_t^{ci} - I_t) \ln 2 \leq -\ln k. \quad (2.41)$$

З останнього випливає наступна оцінка

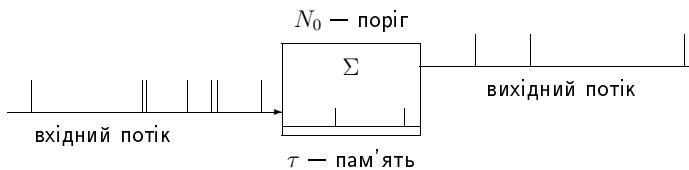
$$I_t - (k - 1) \log_2 e \leq I_t^{ci} \leq I_t - \log_2 k, \quad (2.42)$$

справедлива з точністю до величин, які прямають до нуля, коли $t \rightarrow \infty$.

2.8 Зв'язуючий нейрон

Концепцію зв'язуючого нейрона запропоновано [15] для аналізу закономірностей обробки сигналів реальними нейронами. В реальному нейроні вхідні імпульси запам'ятовуються на деякий час за допомогою електрохімічних перехідних процесів, так званих збуджувальних постсинаптичних потенціалів (ЗПСП). Якщо протягом певного часового інтервалу в нейроні присутня значна кількість (N_0) ЗПСП, то він посилає вихідний імпульс (стріляє). Але оскільки амплітуда ЗПСП з часом зменшується (вони розпадаються), то при недостатньо частих вхідних імпульсах вихідні будуть практично відсутні. Навпаки, при дуже частій вхідній стимуляції вихідний імпульс буде з'являтись практично після кожних N_0 вхідних імпульсів⁶. Це нагадує ЦПЛІ, якщо вхідна сти-

⁶В реальних нейронах протягом певного часу після пострілу спостерігається стан рефракції, в якому вхідні імпульси не сприймаються. Цей стан обумовлюється фізичними обмеженнями механізму генерації спайків і до обробки інформації, здається, не має безпосереднього відношення. Виходячи з цього, в даному розділі вважається, що стан рефракції відсутній.



Мал. 2.4. Схематичне зображення зв'язуючого нейрона. Вхідний імпульс, потрапивши в нейрон, перебуває в ньому протягом часу τ , після чого зникає. Σ позначає кількість імпульсів в нейроні в поточний момент часу. Як тільки досягається ситуація $\Sigma = N_0$ нейрон стріляє, тобто всі наявні в ньому імпульси зникають, а в вихідному потоці з'являється імпульс.

муляція — пуассонівська. При помірній стимуляції зв'язуючий нейрон щоразу, коли потрібна кількість вхідних сигналів надходить за короткий проміжок часу, посилає вихідний імпульс. Кажуть, що нейрон зв'язує ці вхідні імпульси в єдину комплексну подію, зміст якої полягає саме в появі значного числа імпульсів за короткий проміжок часу. Вихідний імпульс можна розглядати як абстрактний вияв цієї події. Модель зв'язуючого нейрона (ЗН), яка розглядається в цьому розділі, відображає перераховані властивості в спрощеному вигляді (Мал. 2.4). А саме кожен вхідний імпульс зберігається в ЗН у незмінному вигляді протягом часу τ , після чого зникає. Час τ можна назвати пам'яттю ЗН. Якщо кількість наявних у ЗН імпульсів досягає порогового значення N_0 , то ЗН посилає вихідний імпульс, і всі наявні імпульси зникають. Якщо вхідні імпульси утворюють пуассонівський процес, то такий ЗН будемо називати пуассонівським (ПЗН). Наша мета — охарактеризувати властивості потоку вихідних імпульсів ПЗН. Зрозуміло, що цей потік не буде марківським із тих же самих причин, що і для ЦПЛІ. Але, оскільки довжини міжімпульсних інтервалів на вихіді ПЗН незалежні, статистику вихідних імпульсів, зокрема аналог формули (2.4), може бути подано через імовірнісний розподіл вихідних інтервалів, як це зроблено після формул (2.10) для пуассонівського процесу.

2.8.1 Розподіл вихідних міжімпульсних інтервалів ПЗН при $N_0 = 2$

Розглянемо ПЗН, який стимулюється пуссонівським процесом із інтенсивністю λ , має пам'ять τ і поріг $N_0 = 2$. Отже, нейрон посилає вихідний імпульс завжди, коли вхідний імпульс приходить раніше, ніж через τ після попереднього, а цей попередній імпульс очікувався довше, ніж τ , або імпульс, за яким він іде слідом, сам був причиною вихідного імпульса.

Статистику вихідних імпульсів можна описати в термінах імовірності розподілу міжімпульсних інтервалів на виході ПЗН. Для цього досить знати ймовірність $P(t, \tau)dt$ того, що перший вихідний імпульс з'явиться через t після включення (з точністю dt). Вказану подію можна розбити на певну кількість альтернатив, позначених номером k вихідного імпульса, який спричинив появу вихідного. Ясно, що $2 \leq k \leq k_{max}$, де

$$k_{max} = [t/\tau] + 2,$$

а $[x]$ позначає цілу частину x . Якщо позначити моменти появи імпульсів через t_1, t_2, \dots, t_{k-1} , то реалізація події з номером k для фіксованих моментів полягає в тому, що інтервали $[0; t_1[,]t_1; t_2[, \dots,]t_{k-1}; t[$ вільні від імпульсів, а в інтервалах довжиною $dt_1, \dots, dt_{k-1}, dt$ в околі моментів $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t$ прийшло по одному імпульсу. Згідно з означенням пуссонівського процесу, ймовірність такої реалізації дається наступним виразом:

$$e^{-\lambda t_1} \lambda dt_1 e^{-\lambda(t_2-t_1)} \lambda dt_2 \dots e^{-\lambda(t_{k-1}-t_{k-2})} \lambda dt_{k-1} e^{-\lambda(t-t_{k-1})} \lambda dt,$$

а ймовірність $P_k(t, \tau)dt$ цієї події при будь-яких допустимих значеннях t_1, t_2, \dots, t_{k-1} обчислюється інтегруванням цього виразу по множині $(k-1)$ -вимірного простору з координатами t_1, t_2, \dots, t_{k-1} , на якій виконуються наступні умови:

$$t_1 \geq 0, t_1 + \tau < t_2, \dots, t_i + \tau < t_{i+1}, \dots, t_{k-2} + \tau < t_{k-1} < t, \quad (2.43)$$

і $t - t_{k-1} < \tau$. Зауважимо, що

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \int_0^{t-(k-2)\tau} dt_1 \int_{t_1+\tau}^{t-(k-3)\tau} dt_2 \cdots \int_{t_{k-2}+\tau}^t dt_{k-1} \lambda dt = \\ = e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \frac{(t - (k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda dt. \quad (2.44) \end{aligned}$$

Якщо $k = k_{max}$, то умова (2.43) гарантує: $(k-1)$ -й імпульс потрапить в інтервал $]t-\tau; t[$, і появі k -го імпульса в момент t викличе вихідний імпульс. Отже, в цьому випадку

$$P_k(t, \tau) dt = e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \frac{(t - (k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda dt, \quad k = k_{max}.$$

Якщо ж $k < k_{max}$, то інтеграл (2.44) містить також і конфігурації, в яких $t_{k-1} < t - \tau$. Для таких конфігурацій появі k -го вхідного імпульса в момент t не викличе вихідного імпульса. Внесок таких несприятливих конфігурацій в інтеграл (2.44) дається виразом

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \int_0^{t-(k-1)\tau} dt_1 \int_{t_1+\tau}^{t-(k-2)\tau} dt_2 \cdots \int_{t_{k-2}+\tau}^{t-\tau} dt_{k-1} \lambda dt = \\ = e^{-\lambda t} \lambda^{k-1} \frac{(t - (k-1)\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda dt, \end{aligned}$$

який слід відняти від (2.44). Отже при $2 \leq k < k_{max}$:

$$\begin{aligned} P_k(t, \tau) dt = \\ = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} ((t - (k-2)\tau)^{k-1} - (t - (k-1)\tau)^{k-1}) \lambda dt. \end{aligned}$$

Повна ймовірність знаходиться як сума ймовірностей альтернатив. Зауважимо, що значення k_{max} змінюється на 1, коли t переходить через ціле кратне τ . Отже для $m = 0, 1, 2, \dots$ можна

стверджувати: якщо $m\tau < t < (m+1)\tau$, то

$$\begin{aligned} P(t, \tau) dt &= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!} (t - m\tau)^{m+1} \lambda dt + \\ &+ \sum_{2 \leq k \leq m+1} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} ((t - (k-2)\tau)^{k-1} - (t - (k-1)\tau)^{k-1}) \lambda dt. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Знайдена функція $P(t, \tau) dt$ є аналогом функції $P(t) dt$, означеного в формулі (2.10) для пуассонівського процессу. Функція $P(t, \tau)$ має максимум при $t = \min(\tau, 1/\lambda)$. Доведемо це. Розглянемо при $m\tau < t < (m+1)\tau$ похідну

$$e^{\lambda \tau} \frac{d}{dt} P(t, \tau) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4,$$

де

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda^{m+1} (t - m\tau)^m}{m!}, \quad P_2 = -\frac{\lambda^{m+2} (t - m\tau)^{m+1}}{(m+1)!}, \\ P_3 &= \sum_{k=3}^{m+1} \frac{\lambda^{k-1} ((t - (k-2)\tau)^{k-2} - (t - (k-1)\tau)^{k-2})}{(k-2)!}, \\ P_4 &= -\sum_{k=2}^{m+1} \frac{\lambda^k ((t - (k-2)\tau)^{k-1} - (t - (k-1)\tau)^{k-1})}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Доведемо спочатку, що для всіх $t > \tau$ $e^{\lambda \tau} \frac{d}{dt} P(t, \tau) < 0$. Тут $m = 1, 2, \dots$. Перетворимо P_3, P_4 наступним чином:

$$P_3 = \sum_{k=2}^m \frac{\lambda^k ((t - (k-1)\tau)^{k-1} - (t - k\tau)^{k-1})}{(k-1)!},$$

$$P_4 = P_{41} + P_{42}, \text{ де}$$

$$P_{41} = -\sum_{k=2}^m \frac{\lambda^k ((t - (k-2)\tau)^{k-1} - (t - (k-1)\tau)^{k-1})}{(k-1)!},$$

$$P_{42} = -\frac{\lambda^{m+1} ((t - (m-1)\tau)^m - (t - m\tau)^m)}{m!}.$$

Розглянемо сумму $P_1 + P_2 + P_{42}$. Після ділення/множення на позитивні константи ця сумма перетворюється на наступний вираз:

$$-\lambda \tau p^{m+1} + (-m - 1) (p + 1)^m + 2 (m + 1) p^m,$$

де $p = (t - m\tau)/\tau < 1$. Останній вираз від'ємний, оскільки перші два доданки розкладу $(p+1)^m : p^m + mp^{m-1}$ знищують $2 (m + 1) p^m$ ($m > 0$). Розглянемо тепер $P_3 + P_{41}$:

$$\sum_{k=2}^m \frac{\lambda^k \left(-(t - k\tau)^{k-1} + 2(t - (k-1)\tau)^{k-1} - (t - (k-2)\tau)^{k-1} \right)}{(k-1)!}.$$

Доведемо, що тут кожен доданок від'ємний. При $m = 2$ доданки відсутні, при $k = 2$ відповідний доданок — нульовий для будь-якого t . Розглянемо $3 \leq k \leq m$. Після ділення/множення на позитивні константи відповідний доданок одержує вигляд

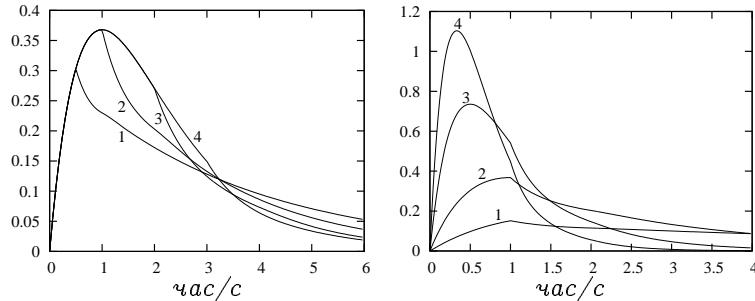
$$-(t - k\tau)^{k-1} + 2(t - (k-1)\tau)^{k-1} - (t - (k-2)\tau)^{k-1}.$$

Розділимо останній вираз на $(t - (k-1)\tau)^{k-1}$. Тоді слід довести, що

$$-(1 + \frac{\tau}{\tau + a})^{k-1} - (1 - \frac{\tau}{\tau + a})^{k-1} + 2 < 0,$$

де позначено $a = t - k\tau$. Останнє — очевидне: при розкладі по біному Ньютона першого доданку всі члени — від'ємні, другого — половина додатніх. Додатні скоротяться з від'ємними, а ті, що залишаться — знищать двійку й забезпечать строгу нерівність. Отже, при $t > \tau$ функція $P(t, \tau)$ спадає. Положення максимуму тоді визначається її поведінкою при $0 < t < \tau$. Для таких t $P(t, \tau) = \lambda t e^{-\lambda t}$. Остання функція монотонно зростає на $[0; \tau]$, якщо $1/\lambda > \tau$, або має максимум у точці $t = 1/\lambda$ якщо, $1/\lambda < \tau$. В першому випадку $P(t, \tau)$ має максимум при $t = \tau$, в другому — при $t = 1/\lambda$, що і означає: $P(t, \tau)$ має максимум в точці $\min(\tau, 1/\lambda)$. Графіки функції $P(t, \tau)$ подано на Мал. 2.5. Пересвідчимось, що розподіл ймовірності (2.45) задовільняє умову нормування

$$\int_0^\infty P(t, \tau) dt = 1. \quad (2.46)$$



Мал. 2.5. Зліва: графік функції $P(t, \tau)$ при $\lambda = 1 \text{ c}^{-1}$, кривим 1, 2, 3, 4 відповідають значення $\tau = 0.5 \text{ c}, 1 \text{ c}, 2 \text{ c}, 3 \text{ c}$; зправа: при $\tau = 1 \text{ c}$, кривим 1, 2, 3, 4 відповідають значення $\lambda = 0.5 \text{ c}^{-1}, 1 \text{ c}^{-1}, 2 \text{ c}^{-1}, 3 \text{ c}^{-1}$.

Безпосереднє інтегрування (2.45) дає наступне:

$$\int_0^{(m+1)\tau} P(t, \tau) dt = 1 - e^{-(m+1)\lambda\tau} \sum_{l=0}^{m+1} \frac{(\lambda\tau)^l (m-l+2)^l}{l!}. \quad (2.47)$$

Отже, для доведення (2.46) слід довести, що для будь-якого $x > 0$ виконується наступне:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-(m+1)x} \sum_{l=0}^{m+1} \frac{x^l (m-l+2)^l}{l!} = 0. \quad (2.48)$$

Доведення останнього твердження винесено в Додаток С.1.

Знайдемо також аналоги формул (2.9), (2.11) для ПЗН. Ймовірність того, що інтервал між двома сусідніми вихідними імпульсами не перевищує $m\tau + s$, де $0 \leq s \leq \tau$, $m = 0, 1, 2, \dots$, дается виразом

$$\begin{aligned} & \int_0^{m\tau+s} P(t, \tau) dt = \\ & = 1 - e^{-m\lambda\tau - \lambda s} \sum_{0 \leq k \leq m+1} \frac{(\lambda s)^{(m+1-k)}}{(m+1-k)!} \left(1 + \sum_{l=1}^k \frac{(\lambda\tau)^l (k-l)^l}{l!} \right). \end{aligned}$$

Звідси ймовірність того, що інтервал між двома сусідніми вихідними імпульсами перевищує $m\tau + s$, дается наступним виразом:

$$\begin{aligned} \int_{m\tau+s}^{\infty} P(t, \tau) dt &= \\ &= e^{-m\lambda\tau - \lambda s} \sum_{0 \leq k \leq m+1} \frac{(\lambda s)^{(m+1-k)}}{(m+1-k)!} \left(1 + \sum_{l=1}^k \frac{(\lambda\tau)^l (k-l)^l}{l!} \right). \end{aligned}$$

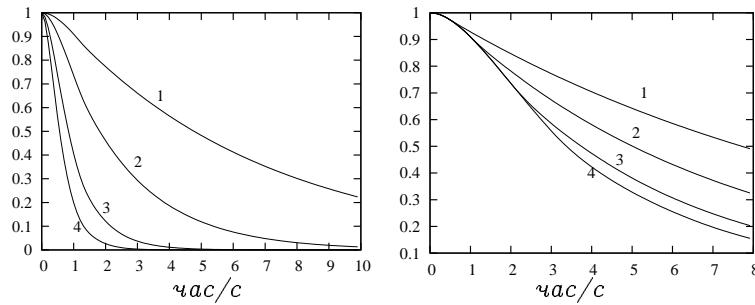
Виходячи з останнього виразу, введемо функцію $f_a(t)$, $t \geq 0$, яка дає ймовірність того, що міжімпульсний інтервал перевищує t , за наступною формулою:

$$\begin{aligned} f_a(t) &= e^{-\lambda t} \sum_{0 \leq k \leq [t/\tau]} \frac{(\lambda s)^{([t/\tau]+1-k)}}{([t/\tau]+1-k)!} \left(1 + \sum_{l=1}^k \frac{(\lambda\tau)^l (k-l)^l}{l!} \right) + \\ &\quad + e^{-\lambda t} \left(1 + \sum_{l=1}^{[t/\tau]} \frac{(\lambda\tau)^l ([t/\tau]+1-l)^l}{l!} \right), \quad (2.49) \end{aligned}$$

де $[x]$ позначає цілу частину числа x , $s = t - [t/\tau]\tau$. Графіки $f_a(t)$ при різних λ , τ подано на Мал. 2.6.

2.8.2 Середня інтенсивність потоку вихідних імпульсів ПЗН із $N_0 = 2$

З огляду на формулу (2.45) зрозуміло, що вихідний процес ПЗН не буде пуассонівським. Разом із тим він буде характеризуватись певним середнім значенням інтервалу W між двома сусідніми вихідними імпульсами, а також середньою інтенсивністю $1/W$. Для обчислення W знайдемо ймовірність того, що проміжок між вихідними імпульсами перевищує t . Подія “інтервал $[0; t]$ вільний від вихідних імпульсів” може реалізуватись е результаті однієї з альтернатив: $\Pi_t 0$: “на $[0; t]$ відсутні вхідні імпульси”; $\Pi_t 1$: “на $[0; t]$ одержано один вхідний імпульс”; $\Pi_t 2$: “на $[0; t]$ одержано два вхідних імпульси, розділених проміжком довшим від τ ”, . . . ; $\Pi_t k$: “на



Мал. 2.6. Графік функції $f_a(t)$ при $\tau = 1.1$ с, кривим 1, 2, 3, 4 відповідають значення $\lambda = 0.5$ с $^{-1}$, 1 с $^{-1}$, 2 с $^{-1}$, 3 с $^{-1}$; при $\lambda = 0.5$ с $^{-1}$, кривим 1, 2, 3, 4 відповідають значення $\tau = 0.5$ с, 1 с, 2 с, 3 с.

[0; t] одержано k вхідних імпульсів, розділених інтервалами, довшими від τ . За кожним з таких імпульсів, крім останнього, має бути проміжок, довший від τ , вільний від імпульсів. Отже, при фіксованому t кількість альтернатив скінчена: $k \leq \bar{k} = [t/\tau] + 1$. Ймовірності перших двох подій обчислюються наступним чином:

$$\Pi_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad \Pi_1(t) = e^{-\lambda t} \lambda t.$$

$\Pi_k(t)$ для $k \geq 2$ можна обчислити, проінтегрувавши вираз

$$e^{-\lambda t_1} \lambda dt_1 e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \lambda dt_2 \dots e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} \lambda dt_k e^{-\lambda(t - t_k)}$$

по області k -вимірного простору, на якій виконано наступні нерівності:

$$0 \leq t_1, t_1 + \tau \leq t_2, t_2 + \tau \leq t_3, \dots, t_{k-1} + \tau \leq t_k \leq t.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Pi_k(t) &= e^{-\lambda t} \lambda^k \int_0^{t-(k-1)\tau} dt_1 \int_{t_1+\tau}^{t-(k-2)\tau} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}+\tau}^t dt_k = \\ &= e^{-\lambda t} \lambda^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ймовірність одержати інтервал, довший від t , має наступний вигляд:

$$\Pi(t) = e^{-\lambda t} \sum_{0 \leq k \leq \bar{k}} \lambda^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!}, \quad \bar{k} = \left[\frac{t}{\tau} \right] + 1. \quad (2.50)$$

Остання формула має той самий зміст, що і формула (2.49); її графіки для різних значень λ, τ зображені на Мал. 2.6. Формула (2.45) має одержуватись як похідна від $\Pi(t)$, домножена на $-dt$. Пересвідчимося в цьому. Якщо $m\tau < t < (m+1)\tau$, то $\bar{k} = m+1$ і

$$\begin{aligned} P(t, \tau) dt &= -\frac{d}{dt} \Pi(t) dt = e^{-\lambda t} \sum_{0 \leq k \leq m+1} \left(-\frac{d}{dt} \right) \lambda^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!} dt + \\ &\quad + \lambda e^{-\lambda t} \sum_{0 \leq k \leq m+1} \lambda^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!} dt = \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{0 \leq k \leq m+1} \lambda^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!} dt - \\ &\quad - e^{-\lambda t} \sum_{1 \leq k \leq m+1} \lambda^k \frac{(t - (k-1)\tau)^{(k-1)}}{(k-1)!} dt = \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{0 \leq k \leq m+1} \lambda^k \frac{(t - (k-1)\tau)^k}{k!} dt - e^{-\lambda t} \sum_{0 \leq k \leq m} \lambda^{(k+1)} \frac{(t - k\tau)^k}{k!} dt. \end{aligned}$$

Тут в обох сумах члени з $k = 0$ скорочуються, член із $k = m+1$ запишемо окремо:

$$\begin{aligned} P(t, \tau) dt &= e^{-\lambda t} \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{\lambda^k}{k!} ((t - (k-1)\tau)^k - (t - k\tau)^k) \lambda dt + \\ &\quad + e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{(m+1)}}{(m+1)!} (t - m\tau)^{m+1} \lambda dt. \end{aligned}$$

Останнє співпадає з (2.45). Для одержання середнього інтервалу між вихідними імпульсами слід обчислити інтеграл

$$W = \int_0^\infty t P(t, \tau) dt = - \int_0^\infty t \frac{d}{dt} \Pi(t) dt = -t \Pi(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \Pi(t) dt.$$

Маємо співвідношення $\lim_{t \rightarrow \infty} t \Pi(t) = 0$, яке доводиться дослівним повторенням міркувань Додатку С.1. Отже,

$$W = \int_0^\infty \Pi(t) dt.$$

Підставимо в останнє вираз для $\Pi(t)$ з рівняння (2.50):

$$\begin{aligned} W &= \sum_{m \geq 0} \int_{m\tau}^{(m+1)\tau} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\lambda^k (t - (k-1)\tau)^k}{k!} dt = \\ &= \tau \sum_{m \geq 0} \int_m^{m+1} e^{-xt} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{x^k (t + 1 - k)^k}{k!} dt, \quad x = \lambda\tau \end{aligned}$$

В останньому виразі виділимо окремо доданок з $k = m + 1$:

$$\begin{aligned} W &= \tau \sum_{m \geq 0} \sum_{k=0}^m \int_m^{m+1} e^{-xt} \frac{x^k (t + 1 - k)^k}{k!} dt + \\ &\quad + \tau \sum_{m \geq 0} \int_m^{m+1} e^{-xt} \frac{x^{m+1} (t - m)^{m+1}}{(m+1)!} dt = \\ &= \tau \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq k} \int_m^{m+1} e^{-xt} \frac{x^k (t + 1 - k)^k}{k!} dt + \\ &\quad + \tau \sum_{m \geq 0} \int_m^{m+1} e^{-xt} \frac{x^{m+1} (t - m)^{m+1}}{(m+1)!} dt = \\ &= \tau \sum_{k \geq 0} \int_k^\infty e^{-xt} \frac{x^k (t + 1 - k)^k}{k!} dt + \tau \sum_{m \geq 0} \int_m^{m+1} e^{-xt} \frac{x^{m+1} (t - m)^{m+1}}{(m+1)!} dt. \end{aligned}$$

Тут у першому інтегралі замінимо змінну інтегрування $t+1-k \rightarrow t$, в другому — $t-m \rightarrow t$. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} W &= \tau \sum_{k \geq 0} e^{-x(k-1)} \int_1^\infty e^{-xt} \frac{x^k t^k}{k!} dt + \tau \sum_{m \geq 0} e^{-xm} \int_0^1 e^{-xt} \frac{x^{m+1} t^{m+1}}{(m+1)!} dt \\ &= \tau \sum_{k \geq 0} e^{-x(k-1)} \int_1^\infty e^{-xt} \frac{(xt)^k}{k!} dt + \tau \sum_{m \geq 1} e^{-x(m-1)} \int_0^1 e^{-xt} \frac{(xt)^m}{m!} dt = \\ &= \tau e^x \sum_{k \geq 0} e^{-xk} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{(xt)^k}{k!} dt - \tau e^x \int_0^1 e^{-xt} dt = \\ &= \frac{\tau e^x}{x} \sum_{k \geq 0} e^{-xk} - \frac{\tau e^x}{x} (1 - e^{-x}). \end{aligned}$$

Виконавши в останньому суммацію по k і підставивши значення x , одержимо

$$W = \frac{e^{\lambda\tau}}{\lambda} \left(\frac{1}{1 - e^{-\lambda\tau}} - (1 - e^{-\lambda\tau}) \right) \text{ або}$$

$$W = \frac{1}{\lambda} \left(2 + \frac{1}{e^{\lambda\tau} - 1} \right). \quad (2.51)$$

З останніх виразів випливають наступні граничні співвідношення:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} W = \frac{2}{\lambda}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W = 2,$$

що узгоджується з інтуїтивними уявленнями.

Інше виведення формули (2.51)

Пуассонівський процес має ту властивість, що ймовірність одержати імпульс з номером n у певний момент часу залежить тільки від моменту приходу імпульсу з номером $n-1$ і не зале-

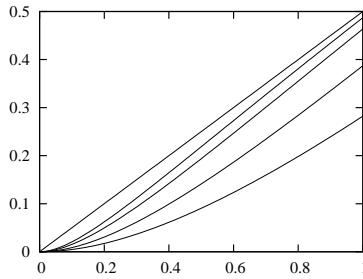
жити від усіх інших. У той же час, замість моментів появи імпульсів $\{\dots, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots\}$ конкретну реалізацію процесу можна визначити, вказавши послідовність міжімпульсних інтервалів $\{\dots, t_{i+1} - t_i, t_{i+2} - t_{i+1}, \dots\}$. Ймовірність одержати певний міжімпульсний інтервал Δ з точністю dt в пуассонівському процесі дається формулою $e^{\lambda\Delta}\lambda dt$ (2.10) і не залежить від величини інших міжімпульсних інтервалів. Отже, ймовірність того, що в певній реалізації пуассонівського процесу будуть спостерігатися міжімпульсні інтервали $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$, залежить тільки від величин інтервалів і не залежить від того, в якому порядку вони з'являються і чи є між ними ще інші, не вказані інтервали.

Для з'ясування того, яка буде середня інтенсивність вихідних спайків ПЗН, слід розглянути ситуацію, коли процес триває безмежно довго⁷, і обчислити ймовірність $p(dt)$ одержати вихідний імпульс у певний момент t в інтервалі dt . Коефіцієнт при dt і дасть шукану середню інтенсивність⁸.

Одержання вихідного імпульсу вимагає, щоб в інтервалі dt був вхідний імпульс, а інтервал між ним і попереднім імпульсом був мешним від τ . Крім того, необхідно, щоб попередній імпульс сам не був причиною вихідного імпульсу в парі зі своїм попередником. Нехай t_1 — це момент появи вихідного імпульсу, безпосереднього попередника до імпульсу, який прийшов у момент t . Кожен більш ранній імпульс нехай має номер на одиницю більший, а імпульс, який прийшов у момент t , має нульовий номер: $t_0 = t$. Тоді умову появи вихідного імпульсу в момент t можна сформулювати наступним чином: для деякого $n \geq 0$ в множині вихідних імпульсів із номерами $\{2n + 1, 2n, \dots, 1, 0\}$ відстані між будь-якими сусідніми менші від τ , а відстань між $2n + 2$ -м і $2n + 1$ -м вихідними імпульсами перевищує τ . Ситуації, які відповідають

⁷Отже, тут розглядаються послідовності імпульсів, які беруть початок при $t = -\infty$, тобто будь-який імпульс має попередників.

⁸Цей коефіцієнт можна назвати диференціальною інтенсивністю. Середню інтенсивність, означену на початку розд. 2.8.2, можна назвати інтегральною інтенсивністю. Математичний факт рівності цих інтенсивностей для стаціонарних випадкових процесів складає зміст теореми В.С.Королюка [16, §11]



Мал. 2.7. Графік залежності λ_o від λ . Верхня пряма дає функцію $\lambda/2$, наступним кривим зверху вниз відповідають значення $\tau = 3$ с., 2 с., 1 с., 0.5 с. відповідно.

різним n , несумісні і вичерпують всі можливості одержання вихідного імпульсу в момент t . Отже, для одержання $p(dt)$ ймовірності альтернатив із різними n слід скласти і помножити на λdt . Ймовірність альтернативи з номером n дается, виходячи з (2.9), (2.11), наступним виразом:

$$e^{-\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{2n+1},$$

відповідно

$$p(dt) = e^{-\lambda\tau} \sum_{n \geq 0} (1 - e^{-\lambda\tau})^{2n+1} \lambda dt = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{2 - e^{-\lambda\tau}} \lambda dt.$$

Отже, середня вихідна інтенсивність ПЗН при $N_0 = 2$, $\lambda_o \equiv \overline{\lambda}_2$ дается наступним виразом:

$$\lambda_o = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{2 - e^{-\lambda\tau}} \lambda,$$

(2.52)

що еквівалентно формулі (2.51), коли врахувати, що $\overline{\lambda}_2 = 1/W$. Графік залежності λ_o від λ при різних τ подано на Мал. 2.7.

Ще одне виведення формули (2.51)

Визначимо середній час, який імпульс проводить у нейроні. Заважимо, що початок стану з одним імпульсом стандартний — вхідний імпульс одержується порожнім нейроном. Для завершення стану з одним імпульсом є дві альтернативи, друга з них індексована числом $x \in [0; \tau]$. Перша альтернатива (A1) — після попадання, імпульс перебуває в нейроні час τ і зникає. Друга (A2x) — через час x , $x < \tau$, після попадання приходить другий імпульс, і вони зникають з генерацією вихідного імпульса. A1 може статися з імовірністю $e^{-\lambda\tau}$, а A2x — з імовірністю $e^{-\lambda x} \lambda dx$, причому має місце нормованість:

$$e^{-\lambda\tau} + \int_0^\tau e^{-\lambda x} \lambda dx = 1.$$

Внесок A1 даетсяя наступним виразом: $\tau e^{-\lambda\tau}$. Сумарний внесок A2x при $x \in [0; \tau]$:

$$\int_0^\tau x e^{-\lambda x} \lambda dx = -\tau e^{-\lambda\tau} - \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}.$$

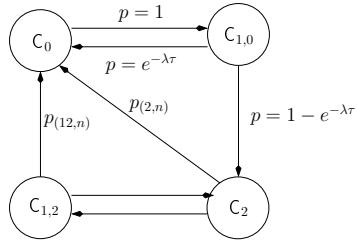
Середня тривалість стану з одним імпульсом в пам'яті — це сума двох попередніх внесків:

$$T_1 = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda\tau}).$$

Середній час, протягом якого нейрон порожній, — $\frac{1}{\lambda}$. Для одержання ймовірності p_1 того, що в довільний момент t в нейроні є один імпульс, слід T_1 розділити на сумму цих часів⁹:

$$p_1 = \frac{T_1}{T_1 + 1/\lambda} = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{2 - e^{-\lambda\tau}}.$$

⁹Оскільки стани з присутнім і відсутнім імпульсом чергуються чарез один.



Мал. 2.8. Схема можливих переходів для порогу 3. C_0 і C_2 позначають нейрон у стані без імпульсів і з двома імпульсами відповідно. $C_{1,0}$ і $C_{1,2}$ позначають нейрон у стані з одним імпульсом, який утворився в результаті одержання або втрати імпульса відповідно.

Ймовірність приходу імпульса в інтервалі $[t; t + dt]$ не залежить від того, вільний чи зайнятий нейрон, і дорівнює λdt . Отже, ймовірність $p_o dt$ вихідного імпульсу в інтервалі $[t; t + dt]$ дається виразом

$$p_o dt = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{2 - e^{-\lambda\tau}} \lambda dt,$$

що еквівалентно (2.52).

2.8.3 Середня інтенсивність потоку вихідних імпульсів ПЗН із $N_0 = 3$

В цьому розділі, базуючись на ідеї, використаній у попередньому підрозділі, обчислюється середня інтенсивність вихідних імпульсів для ПЗН із порогом 3. Слід зауважити, що для порогу, більшого від 2, між двома послідовними заходами в стан із нулем імпульсів може відбутися складний сценарій переходів між станами з 1-м, 2-ма і т.п. імпульсами (див. Мал. 2.8, 2.9), що значно ускладнює розрахунки порівняно з порогом 2.

Позначимо стани нейрона з 0-м, 1-м і 2-ма імпульсами C_0 , C_1 , C_2 відповідно. Якщо нейрон перебуває в стані C_0 , то його

подальша динаміка не залежить від попередніх подій. Дійсно, якщо спостереження почалося в момент $t = 0$ і в стані C_0 , то єдиний можливий перехід — у стан C_1 ; він відбувається зі швидкістю λ . Отже, якщо нейрон виходить із C_0 і повертається в C_0 , то це фрагмент еволюції, який ні від яких подій за його межами не залежить і не впливає на них.

Для визначення середньої інтенсивності вихідної імпульсації при заданій входній слід обчислити, яку долю часу α в середньому нейрон проводить у стані C_2 , якщо функціонування нейрона розпочалося в безмежно віддаленому минулому¹⁰. Середня вихідна інтенсивність тоді обчислюється як

$$\lambda_o = \alpha\lambda. \quad (2.53)$$

Останню формулу можна пояснити наступним чином. Якщо функціонування нейрона розпочалося в безмежно віддаленому минулому, то процес, який утворюють вихідні імпульси, — стаціонарний (інваріантний відносно зсувів по часу). В цьому випадку середня кількість вихідних імпульсів за проміжок часу t , \bar{n}_t , пропорційна довжині цього проміжку: $\bar{n}_t = \lambda_o t$. Зокрема, для безмежно малого проміжку¹¹ dt $\bar{n}_{dt} = \lambda_o dt$. Для цього проміжку останній вираз співпадає з імовірністю одержати вихідний імпульс на цьому проміжку. Останню ймовірність можна обчислити, якщо врахувати, що події “перебування в певному стані в момент t ” і “одержання вхідного імпульсу в момент t ” незалежні, оскільки для пуассонівського процесу момент приходу імпульсу не залежить від того, як розташовані в часі його попередники, а перебування нейрона в певному стані визначається саме розташуванням попередників. Імовірність того, що нейрон перебуває в стані C_2 — α , приходу вхідного імпульсу — λdt , а ймовірність одночасного спостереження вказаних двох незалежних подій, тобто вихідного

¹⁰Згідно зі сказаним вище, початок еволюції в безмежно віддаленому минулому і початок із стану C_0 в момент $t = 0$ дають ідентичну еволюцію для $t > 0$.

¹¹Для “безмежно малого проміжку” нехтуємо ймовірністю одержати більше, ніж одну подію.

імпульсу, обчислюється як добуток $\alpha \lambda dt$, звідки випливає (2.53).

Для визначення α розглянемо уявний експеримент, в якому нейрон спостерігається на відрізку від моменту початку стану C_0 (накопичені імпульси відсутні) до моменту початку наступного стану C_0 . Оскільки вся траекторія складається з таких відрізків, то α , знайдена для таких відрізків, і буде шуканим значенням α .

На вказаному відрізку нейрон перебуває в стані C_0 лише один раз. Середній час перебування в C_0

$$\overline{T_0} = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.54)$$

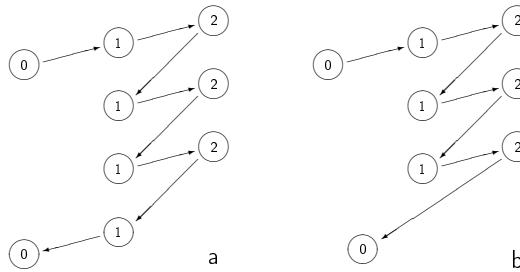
Позначимо середній час перебування в станах C_1, C_2 $\overline{T_1}, \overline{T_2}$, відповідно. Середня тривалість інтервалу між двома послідовними заходами в C_0 — це $\overline{T_0} + \overline{T_1} + \overline{T_2}$, звідки

$$\alpha = \frac{\overline{T_2}}{\overline{T_0} + \overline{T_1} + \overline{T_2}}. \quad (2.55)$$

Для визначення $\overline{T_1}, \overline{T_2}$ слід розглянути всі можливі сценарії зміни стану нейрона між послідовними заходами в стан C_0 . Сценарій, в якому нейрон побував n разів в стані C_2 і перейшов в стан C_0 безпосередньо з стану C_2 , тобто з вихідним імпульсом, позначимо $(n,1)$. Сценарій, в якому нейрон побував n разів в стані C_2 і перейшов в стан C_0 з стану C_1 , тобто без вихідного імпульсу, позначимо $(n,0)$. Сценарій $(n,0)$ реалізується, якщо після попадання n -ий раз у стан C_2 нейрон очікує вхідного імпульсу довше, ніж τ . Схематичні приклади сценаріїв зображені на Мал. 2.9.

Ймовірності окремих сценаріїв

Позначимо через $p_{(n,0)}, p_{(n,1)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ймовірності реалізації відповідних сценаріїв. Будь-який сценарій реалізується, якщо серія вхідних імпульсів розташована в часі відповідним чином. Будемо нумерувати вхідні імпульси так, що імпульс, який викликає перший перехід із стану C_0 в стан C_1 , одержує номер 0.



Мал. 2.9. Приклади сценаріїв: а — (3,0), б — (3,1). Числа в колах позначають кількість імпульсів в нейроні. Тут кожен із переходів $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 0$ потребує вхідного імпульсу. Переходи $2 \rightarrow 1$ і $1 \rightarrow 0$ відбуваються без вхідних імпульсів.

Міжімпульсні інтервали занумеруємо так, що x_1 позначає відрізок часу, який проходить між нульовим і першим імпульсами. Для пуассонівського процесу окремі міжімпульсні інтервали незалежні. Ймовірність одержати інтервал x з точністю dx дается виразом (2.10)

$$P(x) dx = e^{-\lambda x} \lambda dx.$$

Найкоротший сценарій, $(0,0)$, реалізується якщо після переходу нейрона $C_0 \rightarrow C_1$ наступний імпульс очікується довше, ніж τ . Отже, нейрон повертається в стан C_0 без заходів в C_2 і без вихідного імпульсу. Ймовірність такого сценарію — це ймовірність події ($x_1 > \tau$). Отже, згідно (2.11),

$$p_{(0,0)} = e^{-\lambda \tau}.$$

Сценарій $(0,1)$ неможливий, оскільки неможливо одержати вихідний імпульс без заходу в стан C_2 . Отже,

$$p_{(0,1)} = 0.$$

Для обчислення ймовірностей сценаріїв $(n, 0)$, $(n, 1)$, $n = 1, 2, \dots$ зауважимо, що для реалізації сценарію з n заходами в стан C_2

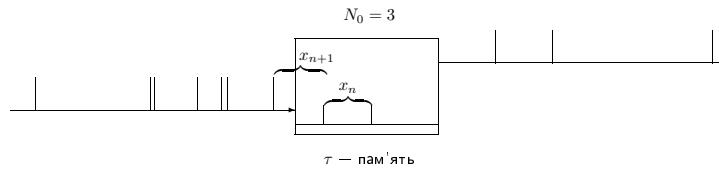
необхідно рівно n вхідних імпульсів¹². Для завершення з вихідним імпульсом потрібен ще один вхідний імпульс. Для заходів в $C_{1,2}$ і остаточного переходу з $C_{1,2}$ в C_0 імпульси не потрібні¹³. Для підтримання неперервного процесу переходів в $C_2, C_{1,2}, C_2, C_{1,2} \dots$, необхідно, щоб кожен міжімпульсний інтервал x_i був коротшим від τ , але довшим, ніж $\tau - x_{i-1}$. Умова $x_i < \tau$ гарантує, що наступний імпульс прийде в нейрон раніше, ніж зникне його попередник. Умова $x_i > \tau - x_{i-1}$ гарантує, що наступний імпульс прийде в нейрон після того, як зникне попередник його попередника, отже в нейроні буде в цей момент рівно один імпульс. Перший інтервал, x_1 , може бути як завгодно коротким, оскільки в стані $C_{1,0}$ є тільки один імпульс з моменту його (стану) виникнення. Для завершення з вихідним імпульсом останній інтервал ($(n+1)$ -ї) має бути коротшим від $\tau - x_n$, і тоді в момент приходу $n+1$ -го імпульсу в нейроні буде 2 імпульси, що приведе до переходу в C_0 з вихідним імпульсом (Мал. 2.10). Для завершення без вихідного імпульса останній інтервал ($(n+1)$ -ї) має бути довшим від τ , тоді в момент приходу $n+1$ -го імпульсу в нейроні не буде імпульсів. Отже, він перейшов в стан C_0 через τ після приходу n -го. Після приходу n -го імпульса нейрон перейде в стан C_2 , через $\tau - x_n$ в стан C_1 і ще через x_n — в стан C_0 (Мал. 2.11). Сказане дозволяє записати наступні вирази для ймовірностей¹⁴:

$$p_{(n,1)} = \int_0^{\tau} e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \\ \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n \int_0^{\tau-x_n} e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1}, \quad (2.56)$$

¹²Імпульс, який спричиняє перший переход $C_0 \rightarrow C_1$, не рахується.

¹³ $C_{1,2}, C_{1,0}$ позначають стан із одним імпульсом, якому передував стан C_2 , C_0 відповідно.

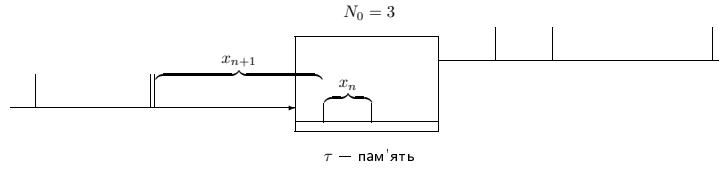
¹⁴Тут враховано, що довжини міжімпульсних інтервалів для пуассонівського процесу незалежні.



Мал. 2.10. До обчислення $p_{(n,1)}$. Тут для переходу в C_0 з вихідним імпульсом необхідне виконання нерівності $x_{n+1} < \tau - x_n$.

$$\begin{aligned}
 p_{(n,0)} &= \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \\
 &\quad \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n \int_\tau^\infty e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} = \\
 &= e^{-\lambda \tau} \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n.
 \end{aligned}$$

Ці формули справедливі для $n = 1, 2, \dots$



Мал. 2.11. До обчислення $p_{(n,0)}$. Тут для переходу в C_0 без вихідного імпульсу необхідне виконання нерівності $x_{n+1} > \tau$.

Пересвідчимося, що сума ймовірностей всіх альтернатив складає 1. Слід довести рівність

$$S_1 = e^{-\lambda \tau} + \sum_{n \geq 1} (p_{(n,0)} + p_{(n,1)}) = 1. \quad (2.57)$$

Підставимо сюди вирази для $p_{(n,0)}$, $p_{(n,1)}$:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= e^{-\lambda\tau} + \sum_{n \geq 1} \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \\
 &\quad \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n \left(\int_\tau^\infty e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} + \int_0^{\tau-x_n} e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} \right) \\
 &= e^{-\lambda\tau} + \sum_{n \geq 1} \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n \times \\
 &\quad \times \left(1 - \int_{\tau-x_n}^\tau e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} \right) = \\
 &= e^{-\lambda\tau} + \sum_{n \geq 1} \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n - \\
 &\quad - \sum_{n \geq 1} \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \int_{\tau-x_n}^\tau e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} = \\
 &= e^{-\lambda\tau} + \sum_{n \geq 1} \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n - \\
 &\quad - \sum_{n \geq 2} \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau e^{-\lambda x_2} \lambda dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau e^{-\lambda x_n} \lambda dx_n = \\
 &= e^{-\lambda\tau} + \int_0^\tau e^{-\lambda x_1} \lambda dx_1 = 1,
 \end{aligned}$$

що і треба було довести.

Внески окремих сценаріїв

В даному підрозділі ми випишемо формули для обчислення внеску окремого сценарію в середній час перебування нейрона в кожному зі станів C_0, C_1, C_2 . Для сценарію $(n,1)$ кожен із інтервалів $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ дає час перебування в стані C_2 , рівний $\tau - x_i$. Інтервал x_n і наступний (породжуючий вихідний імпульс) разом дають час перебування в C_2 , рівний x_{n+1} . Отже, при фіксованому наборі інтервалів, який забезпечує сценарій $(n,1)$, час перебування в C_2 дается виразом $(n-1)\tau - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} + x_{n+1}$, точніше

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) + x_{n+1}.$$

Для сценарію $(n,0)$ цей час буде

$$\sum_{i=1}^n (\tau - x_i).$$

Повний час від моменту переходу $C_0 \rightarrow C_1$ до моменту переходу $C_2 \rightarrow C_0$ в сценарії $(n,1)$ дорівнює $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$. Отже, час, проведений у стані C_1 , буде $2(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n - (n-1)\tau$, або

$$\sum_{i=1}^{n-1} (2x_i - \tau) + x_n.$$

Повний час від переходу $C_0 \rightarrow C_1$ до моменту переходу $C_1 \rightarrow C_0$ в сценарії $(n,0)$ дорівнює $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \tau$. Отже, час, проведений в C_1 , буде $2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (n-1)\tau$, або

$$\sum_{i=1}^n (2x_i - \tau) + \tau.$$

Останні чотири вирази справедливі також і для $n = 1$, якщо вважати значення суми рівним нулю, коли її нижня межа сумації перевищує верхню на 1.

Виписані вище формулі дають час перебування в відповідних станах, якщо набір міжімпульсних інтервалів фіксовано. Для того, щоб визначити, яким є внесок певного набору міжімпульсних інтервалів у середній час перебування в відповідному стані, слід ці формули домножити на ймовірності відповідних наборів інтервалів. Для того, щоб одержати внесок певного сценарію слід після домноження проінтегрувати одержаний вираз по множині наборів інтервалів, які забезпечують еволюцію за цим сценарієм. Сказане дозволяє записати наступні вирази для внесків окремих сценаріїв:

$$\overline{T_{2,(n,1)}} = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \cdots \\ \cdots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) + x_{n+1} \right),$$

$$\overline{T_{1,(n,1)}} = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \cdots \\ \cdots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (2x_i - \tau) + x_n \right),$$

$$\overline{T_{2,(n,0)}} = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \cdots \\ \cdots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_\tau^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right),$$

$$\overline{T_{1,(n,0)}} = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \cdots$$

$$\cdots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_\tau^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (2x_i - \tau) + \tau \right),$$

де $n = 1, 2, \dots$, а $\overline{T_{2,(n,1)}}, \overline{T_{1,(n,1)}}, \overline{T_{2,(n,0)}}, \overline{T_{1,(n,0)}}$ позначають внесок сценаріїв $(n, 1)$ і $(n, 0)$ в час перебування в стані C_2 і в стані C_1 відповідно. Крім того, оскільки сценарій $(0,1)$ неможливий, а в сценарії $(0,0)$ заходи в стан C_2 відсутні, то

$$\overline{T_{2,(0,1)}} = 0, \quad \overline{T_{1,(0,1)}} = 0, \quad \overline{T_{0,(0,1)}} = 0, \quad \overline{T_{2,(0,0)}} = 0.$$

Також очевидно:

$$\overline{T_{1,(0,0)}} = e^{-\lambda\tau} \tau, \quad \overline{T_{0,(0,0)}} = \overline{T_{0,(n,0)}} = \overline{T_{0,(n,1)}} = \frac{1}{\lambda}, \quad n = 1, 2, \dots$$

За означенням,

$$\overline{T_1} = e^{-\lambda\tau} \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{1,(n,0)}} + \overline{T_{1,(n,1)}}), \quad \overline{T_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}}).$$

Обчислення \overline{T}

Середній час між двома послідовними заходами в стан C_0 , \overline{T} дается виразом

$$\begin{aligned} \overline{T} &= \overline{T_0} + \overline{T_1} + \overline{T_2} = \\ &= \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda\tau} \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{1,(n,0)}} + \overline{T_{1,(n,1)}} + \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}}), \end{aligned} \quad (2.58)$$

або

$$\overline{T} = \overline{T_0} + \overline{T_1} + \overline{T_2} = \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda\tau} \tau + \sum_{n=1}^{\infty} S_n, \quad (2.59)$$

$$\Delta e S_n = \overline{T_{1,(n,0)}} + \overline{T_{1,(n,1)}} + \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} =$$

$$\int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \right) +$$

$$+ \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_\tau^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \tau \right).$$

Врахуємо тут, що $\int_\tau^\infty e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} = e^{-\lambda \tau}$:

$$S_n = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i +$$

$$+ e^{-\lambda \tau} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^n x_i + \tau \right).$$

Тут у першому доданку інтеграл по x_{n+1} подамо в наступному вигляді: $\int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} = \int_0^\tau dx_{n+1} - \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1}$:

$$S_n = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i -$$

$$- \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i +$$

$$+ e^{-\lambda \tau} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^n x_i + \tau \right).$$

Введемо наступні позначення

$$I_0(\lambda, \tau, n) = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \cdots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$I_1(\lambda, \tau, n) = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \cdots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \sum_{i=1}^n x_i,$$

де $n = 1, 2, \dots$. Тоді

$$S_n = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \cdots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i -$$

$$- \lambda^{n+1} I_1(\lambda, \tau, n+1) + e^{-\lambda\tau} \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) + \tau e^{-\lambda\tau} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n).$$

Для перетворення останнього виразу використаємо наступні формули: $\int_0^\tau e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda dx_{n+1} = 1 - e^{-\lambda\tau}$, $\int_0^\tau e^{-\lambda x_{n+1}} \lambda x_{n+1} dx_{n+1} = -\tau e^{-\lambda\tau} - \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$:

$$S_n = (1 - e^{-\lambda\tau}) \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) + \left(-\tau e^{-\lambda\tau} - \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) -$$

$$- \lambda^{n+1} I_1(\lambda, \tau, n+1) + e^{-\lambda\tau} \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) + \tau e^{-\lambda\tau} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n),$$

або після скорочення

$$S_n = \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) - \lambda^{n+1} I_1(\lambda, \tau, n+1) + \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n).$$

Отже¹⁵,

$$\overline{T} = \frac{2}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} + \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n). \quad (2.60)$$

¹⁵ Використано рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n I_1(\lambda, \tau, n) = 0$, яка доводиться виходячи з оцінки $I_1(\lambda, \tau, n) < n\tau I_0(\lambda, \tau, n)$ і оцінки в примітці на с. 129.

Обчислення $\overline{T_2}$ і $\overline{T_1}$

Обчислення, аналогічні попереднім, виконаємо для $\overline{T_2}$:

$$\overline{T_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}}).$$

Тут доданки з певним n мають вигляд

$$\begin{aligned} & \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} = \\ & = \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_{\tau}^{\infty} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\ & + \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\ & \quad \times \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) + x_{n+1} \right) = \\ & = \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_{\tau}^{\infty} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\ & + \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\ & \quad \times \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) - \tau + x_n + x_{n+1} \right) = \\ & = \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_{\tau}^{\infty} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) - \tau + x_n + x_{n+1} \right) - \\
& - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) - \tau + x_n + x_{n+1} \right) = \\
& = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\infty dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\
& + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} (-\tau + x_n + x_{n+1}) - \\
& - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) - \tau + x_n + x_{n+1} \right) = \\
& = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) - \\
& - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} (x_n + x_{n+1} - \tau) - \\
& - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} (x_n + x_{n+1} - \tau).
\end{aligned}$$

Використаємо тут співвідношення $\lambda \int_0^\tau (x_k + x_n - \tau) e^{-\lambda x_k} dx_k - \lambda \int_{\tau-x_n}^\tau (x_k + x_n - \tau) e^{-\lambda x_k} dx_k = -\frac{e^{\lambda x_n} - \lambda \tau}{\lambda} + x_n - \tau + \frac{1}{\lambda}$, $k = n+1$:

$$\begin{aligned}
& \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} = \\
& = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) \right) - \\
& - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\
& + \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(1 - e^{\lambda(x_n - \tau)} \right). \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Тут врахуємо, що $\int_0^{\tau-x_n} e^{-\lambda x_{n+1}} dx_{n+1} = (1 - e^{\lambda(x_n - \tau)}) / \lambda$:

$$\begin{aligned}
& \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} = \\
& = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) \right) - \\
& - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right)
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^n.$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}} = \\ & = \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) \right) - \\ & - \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n (\tau - x_i) \right) + \\ & + \frac{1}{\lambda} p_{(n,1)}, \end{aligned}$$

де $p_{(n,1)}$ — ймовірність сценарію $(n,1)$, задана формулою (2.56).
З останнього маємо¹⁶:

$$\overline{T_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{T_{2,(n,0)}} + \overline{T_{2,(n,1)}}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} p_{(n,1)}. \quad (2.62)$$

Останнє, базуючись на виразі (2.61), можна подати наступним чином:

$$\begin{aligned} \overline{T_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_0^{\tau-x_n} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^n - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n \int_{\tau-x_n}^\tau dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^n = \end{aligned}$$

¹⁶ Враховано, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\tau dx_1 \int_{\tau-x_1}^\tau dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^\tau dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^n \sum_{i=1}^{n-1} (\tau - x_i) = 0$. Останнє доводиться так само, як і в примітці на с. 122.

$$\begin{aligned}
&= (1 - e^{-\lambda\tau}) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \lambda^{n-1} - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n \int_{\tau-x_n}^{\tau} dx_{n+1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n+1} x_i} \lambda^n = \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1} I_0(\lambda, \tau, n+1) = \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) + I_0(\lambda, \tau, 1) = \\
&= I_0(\lambda, \tau, 1) - \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n),
\end{aligned}$$

звідки

$$\overline{T_2} = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n). \quad (2.63)$$

$\overline{T_1}$ тепер можна знайти як $\overline{T_1} = \overline{T} - \overline{T_0} - \overline{T_2}$ на основі формул (2.54), (2.60), (2.63):

$$\overline{T_1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n). \quad (2.64)$$

Обчислення $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n)$

Перетворимо окремий доданок у шуканій суммі наступним чином:

$$\lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) = \lambda^n \int_0^{\tau} dx_1 \int_{\tau-x_1}^{\tau} dx_2 \dots \int_{\tau-x_{n-1}}^{\tau} dx_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} =$$

$$= q^n e^{-nq} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \dots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n e^{q \sum_{i=1}^n x_i},$$

де $q = \lambda\tau$. Тут виконане наступне перетворення змінних інтегрування: $x_i \rightarrow \tau(1 - x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Перепишемо останнє в такому вигляді:

$$\lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) = \int_0^1 dx_1 q e^{q(x_1-1)} \int_0^{1-x_1} dx_2 q e^{q(x_2-1)} \dots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n q e^{q(x_n-1)},$$

і введемо інтегральний оператор

$$(M(q)f)(x) = q e^{q(x-1)} \int_0^{1-x} f(z) dz.$$

Тоді

$$\lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) = \int_0^1 dx ((M(q))^{n-1} g)(x), \text{ де } g(x) = q e^{q(x-1)}.$$

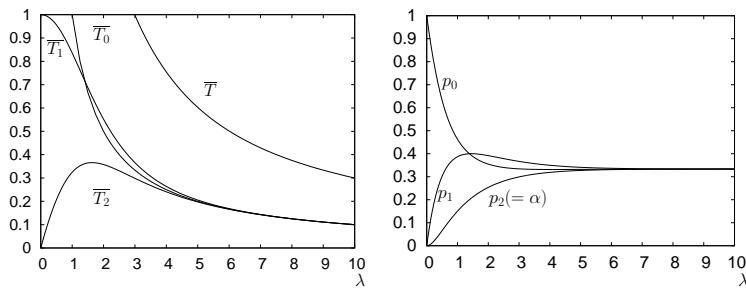
Відповідно

$$\begin{aligned} S &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n I_0(\lambda, \tau, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 dx ((M(q))^{n-1} g)(x) = \\ &= 1 - e^{-q} + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 dx ((M(q))^{n-1} g)(x) = \\ &= 1 - e^{-q} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dx ((M(q))^n h)(x), \end{aligned}$$

де

$$h(x) = (M(q)g)(x) = q e^{-q} - q e^{q(x-2)}.$$

Зауважимо, що $h(1) = 0$ і що оператор $M(q)$ зберігає цю властивість. Нехай область визначення оператора $M(q)$, $D \equiv D(M(q))$



Мал. 2.12. Зліва: середні часи перебування нейрона в станах C_0 , C_1 , C_2 , в проміжку між двома послідовними заходами в стан C_0 і середня тривалість цього проміжку, \bar{T} , як функції λ при $\tau = 1$ с; зправа: ймовірності знайти нейрон у станах C_0 , C_1 , C_2 в будь-який момент часу.

складається з обмежених функцій $f(x)$, завданіх на відрізку $x \in [0; 1]$. Нехай топологія в D задається нормою $\|f\| = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$, тоді оператор взяття інтегралу по відрізку $[0; 1]$ буде неперервним із D в R^1 . Крім того, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((M(q))^n h)(x)$$

збігається за нормою в D . Дійсно, норма оператора M оцінюється наступним чином:

$$\|M(q)\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \frac{\left\| q e^{q(x-1)} \int_0^{1-x} f(z) dz \right\|}{\|f\|} \leq \sup_{x \in [0; 1]} q e^{q(x-1)} (1-x).$$

Останній вираз оцінюється числом $e^{-q} < 1$. Звідси виходить, що окремий доданок ряду оцінюється наступним чином¹⁷:

$$\sup_{x \in [0; 1]} |((M(q))^n h)(x)| = \|((M(q))^n h)\| \leq e^{-nq} \|h\|,$$

¹⁷ Звідси, зокрема, випливає оцінка $\lambda^{n+2} I_0(\lambda, \tau, n+2) < e^{-nq} \|h\|$, $n \leq 0$, потрібна в примітці на с. 122.

де

$$||h|| = q e^{-q} - q e^{-2q}.$$

Отже, в останньому виразі для S можна обернути порядок інтегрування і суммациї:

$$S = 1 - e^{-q} + \int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} ((M(q))^n h)(x). \quad (2.65)$$

Розглянемо функцію $f(x) \in D$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ((M(q))^n h)(x). \quad (2.66)$$

Тоді

$$S = 1 - e^{-q} + \int_0^1 f(x) dx. \quad (2.67)$$

Зі сказаного вище виходить: $f(x)$ — обмежена на $[0; 1]$. Крім того, виконується наступне рівняння:

$$f - M(q)f = h,$$

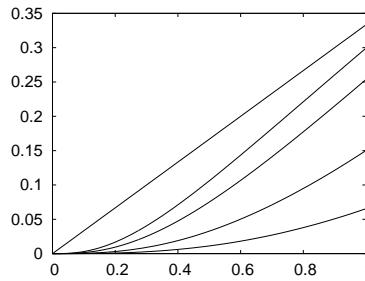
або

$$f(x) - q e^{q(x-1)} \int_0^{1-x} f(y) dy = q e^{-q} - q e^{q(x-2)}.$$

Останнє рівняння розв'язане в Додатку С.2. Явний вираз $f(x)$ для $0 < q \leq \ln(4)$ і для $q \geq \ln(4)$ дається формулами (С.6) і (С.7) відповідно. Застосування формули (2.67) до (С.6) і (С.7) дає для $q \leq \ln(4)$

$$S(q) = \frac{s(q) \sin\left(\frac{q e^{-q/2} s(q)}{2}\right) + \left(e^{\frac{q}{2}} - 2e^{-\frac{q}{2}}\right) \cos\left(\frac{q e^{-q/2} s(q)}{2}\right) + 1}{2e^{-\frac{q}{2}} \cos\left(\frac{q e^{-q/2} s(q)}{2}\right) + 1}, \quad (2.68)$$

де $s(q) = \sqrt{4 - e^q}$.



Мал. 2.13. Графік залежності λ_o від λ для $N_0 = 3$. Верхня пряма дає функцію $\lambda/3$, наступним кривим зверху вниз відповідають значення $\tau = 3$ с., 2 с., 1 с., 0,5 с. відповідно.

Для $q \geq \ln(4)$ одержується вираз

$$S(q) = \frac{-s_1(q) \sinh\left(\frac{q e^{-q/2} s_1(q)}{2}\right) + \left(e^{\frac{q}{2}} - 2e^{-\frac{q}{2}}\right) \cosh\left(\frac{q e^{-q/2} s_1(q)}{2}\right) + 1}{2e^{-\frac{q}{2}} \cosh\left(\frac{q e^{-q/2} s_1(q)}{2}\right) + 1}, \quad (2.69)$$

де $s_1(q) = \sqrt{e^q - 4}$. Підстановка одержаних для $S(q)$ виразів за- мість суми ряду в (2.60), (2.63), (2.64) дає явні вирази для середніх часів $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T} = \overline{T}_0 + \overline{T}_1 + \overline{T}_2$, перебування нейрона в станах C_1, C_2 в проміжку між двома послідовними заходами в стан C_0 і середню тривалість цього проміжку як функції λ, τ . Приклади графіків цих функцій показано на Мал. 2.12. Підставивши зна- йдені функції в (2.55), одержимо α як функцію λ . Графіки цієї функції та ймовірностей станів C_0, C_1 показано на Мал. 2.12. Ви- хідна інтенсивність залежить від вхідної за наступним законом:

$$\boxed{\lambda_o = \frac{1 - e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} S(\lambda\tau)}{2 - e^{-\lambda\tau} + (1 - e^{-\lambda\tau}) S(\lambda\tau)} \lambda.}$$

Графіки залежності середньої вихідної інтенсивності λ_o від λ по- казано на Мал. 2.13 (порівняти з випадком $N_0 = 2$, стор. 109).

Розділ 3

Системи з неперервною множиною станів

У цьому розділі буде розглянуто системи, стани яких описуються континуальним набором значень, наприклад, інтервалом дійсної осі $[x_m; x_M]$, де $-\infty \leq x_m < x_M \leq \infty$. При цьому виникає принципова відмінність від систем зі скінченим набором станів. Для останніх параметр n , який характеризує певний стан, був просто його номером. Зміна нумерації шляхом перестановок номерів або вибором номерів з іншої множини не вносить змін в систему, як це видно, зокрема, з формул (1.70), (1.77). В цьому сенсі можна сказати, що позначки станів n не мають фізичного змісту. Якщо позначки станів беруться з множини дійсних чисел, R^1 , то слід врахувати, що ця множина має внутрішню структуру¹. Зміна позначок станів без врахування цієї структури може виявитись некоректною. Для уникнення можливих проблем слід надати позначкам станів змістовне значення (фізичний зміст), який узгоджується зі способом нумерації станів, і при трактуванні математичних об'єктів керуватись цим фізичним змістом. В даному розділі позначка стану (стан) x буде інтерпретуватися,

¹Ця структура описана, наприклад, у [18].

наприклад, як координата, або як швидкість частинки у відповідній системі координат.

Інша відмінність полягає в тому, що коли стани системи належать до R^1 , то в більшості випадків перехідна ймовірність $p(x, t | x', t')$ дорівнює 0, оскільки ймовірність потрапити точно в конкретний стан x , як правило, нульова (існує “занадто багато” можливих станів). В цьому випадку цікавляться ймовірністю $P(M, t | x', t')$ потрапити в деяку множину станів M , яка включає в себе стан x . Ми будемо вважати, що існує густина означеної ймовірності, $p(x, t | x', t')$, тобто

$$P(M, t | x', t') = \int_{y \in M} p(y, t | x', t') dy,$$

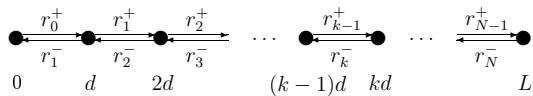
де $p(y, t | x', t')$ може бути і узагальненою функцією типу функції Дірака. Запис $p(x, t | x', t') dx$ будемо розглядати як імовірність зі стану x' потрапити в стан x “із точністю dx ”, тобто потрапити в інтервал довжиною dx , який включає в себе точку x .

Ще одна відмінність полягає в тому, що для континуальної множини станів реалізації стохастичного процесу можуть мати додаткові аналітичні властивості, наприклад неперервність, які не мають змісту для систем із дискретною множиною станів. Встановлення наявності або відсутності таких властивостей може мати практичний інтерес.

Як і в попередніх розділах, під стохастичним процесом розуміється сукупність нормованих і узгоджених між собою багаточасових розподілів. Така точка зору виправдана, якщо стохастичний процес використовується для обчислення середніх значень від фізичних величин, які є “хорошими” функціями позначки стану і часу. На стохастичні процеси з континуальною множиною станів автоматично розповсюджуються поняття процесу без післядії, марківського процесу (п. 1.2.1) і перехідних імовірностей (п. 1.2.2).

3.1 Частинка на інтервалі

Розглянемо систему з лінійним графом переходів, описану рівняннями (1.16). При цьому стани 0 і N будемо розглядати як кінці інтервалу $[0; L]$ в фізичному просторі, а стани $\{1, 2, \dots, N - 1\}$ — як проміжні точки, розташовані еквідистантно на цьому відрізку. Відстань між сусідніми станами позначимо $d = L/N$. Граф переходів такої системи зображене на Мал. 3.1.



Мал. 3.1. Граф переходів для частинки на інтервалі $[0; L]$.

В рівнянні (1.16) замість номера стану n підставимо просторову координату $x = nd$, в результаті чого одержимо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(x, t | x', t') &= -(r^-(x) + r^+(x))p(x, t | x', t') + \\ &+ r^-(x+d)p(x+d, t | x', t') + r^+(x-d)p(x-d, t | x', t'), \\ &x, x' \in \{0, d, \dots, Nd\}, \\ p(-d, t | x', t') &\equiv 0, \quad p(L+d, t | x', t') \equiv 0, \\ r^-(0) &\equiv 0, \quad r^+(L) \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Якщо описувати випадковий рух частинки на інтервалі $[0; L]$ як такий, що здійснюється за посередництвом дуже коротких випадкових стрибків, то в рівнянні (3.1) слід спробувати перейти до границі $d \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). Зауважимо, що коли довжина стрибка прямує до 0, то при незмінних частотах стрибків, $r^\pm(x)$, в середньому рух частинки буде сповільнюватись і в границі $d \rightarrow 0$ рух буде відсутній. Отже, для збереження нетривіальної динаміки при $d \rightarrow 0$ слід величини $r^\pm(x)$ масштабувати в бік збільшення одночасно зі зменшенням d , що призводить до збільшення

середньої кількості стрибків за одиницю часу. Конкретний спосіб масштабування залежить від співвідношень між $r^+(x)$ і $r^-(x)$ і визначається фізикою тих процесів, які моделюються рівнянням (3.1).

3.2 Детерміністична динаміка

Припустімо, що можливі стрибки тільки в один бік, наприклад, вправо. Для спрощення запису розглянемо випадок, коли ймовірність стрибка не залежить від позиції. Тоді

$$r^-(x) \equiv 0, \quad r^+(x) \equiv r^+. \quad (3.2)$$

Виберемо для граничного переходу $d \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) масштабування

$$r^+ = \frac{v_0}{d}, \quad (3.3)$$

— тоді (3.1) переходить у наступне:

$$\frac{d}{dt} p(x, t | x', t') = -\frac{v_0}{d} p(x, t | x', t') + \frac{v_0}{d} p(x - d, t | x', t'), \quad (3.4)$$

або після переходу до границі $d \rightarrow 0$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') = -v_0 \frac{\partial}{\partial x} p(x, t | x', t').} \quad (3.5)$$

Останнє рівняння дає детерміністичну динаміку. Дійсно, початкові умови (1.10) переписуються для неперервної змінної x наступним чином:

$$p(x, t' | x', t') = \delta(x - x'), \quad (3.6)$$

де $\delta(x)$ — функція Дірака, а розв'язок (3.5) дається виразом

$$p(x, t | x', t') = \begin{cases} \delta(x - (x' + v_0(t - t'))), & t - t' < (L - x')/v_0, \\ \delta(x - L), & t - t' \geq (L - x')/v_0. \end{cases}$$

Останній вираз описує рух частинки вправо зі швидкістю v_0 до точки L , де цей рух припиняється. Цей рух детерміністичний у наступному сенсі: якщо частинка в момент t' перебуває в точці x' з імовірністю 1, то в момент $t > t'$ вона буде в точці $\min(x' + v_0(t - t'), L)$ також з імовірністю 1.

Очевидно, для розглянутого випадку (3.2), коли стрибки вліво відсутні, єдиний варіант скейлінгу, який дозволяє одержати рівняння зі скінченою правою частиною, — (3.3). Цікаво чи існують априорні міркування, які дозволяють передбачити (3.3) без апелювання до диференціального рівняння? Такі міркування можна одержати, якщо оцінити середній час, W , необхідний частинці для переміщення від положення $x = 0$ до $x = L$. Очевидно, для переміщення слід зробити N стрибків. Оскільки середній час між послідовними стрибками — це $1/r^+$, то середній час на проходження всього інтервалу $[0; L]$ дается виразом

$$W = N/r^+ = L/(r^+ d),$$

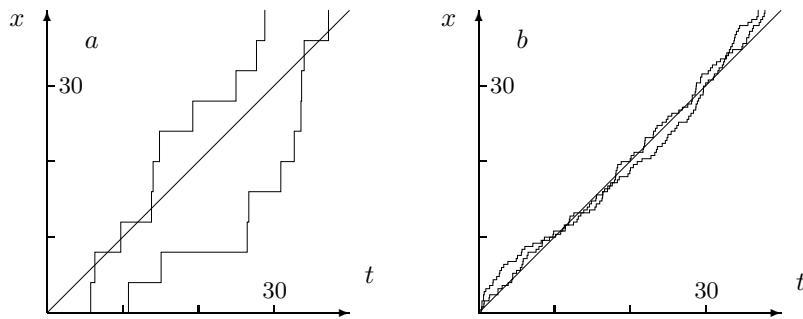
звідки видно, що для збереження середнього часу при $d \rightarrow 0$ потрібен саме скейлінг (3.3).

Зауважимо, що для швидкості, залежної від координати, міркування, аналогічні проведеним вище, дають наступне рівняння:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') = -\frac{\partial}{\partial x} (r(x)p(x, t | x', t'))}, \quad (3.7)$$

яке теж визначає детерміністичний рух, швидкість якого залежить від координати.

На питання, як виникла детерміністична динаміка у частинки, яка до виконання граничного переходу $d \rightarrow 0$ рухається шляхом випадкових стрибків, можна відповісти наступним чином. Час, потрібний для проходження частинкою відрізку l , є сумою часів, потрібних на виконання l/d випадкових стрибків. Час очікування одного стрибка флюктує навколо середнього значення d/v_0 і може бути як більшим, так і меншим від d/v_0 . Ці флюктуації “висереднюються” (частково компенсиуються), коли на прохо-



Мал. 3.2. Наближення до детерміністичного руху при зменшенні довжини стрибка d . Тут $L = 40$, $v_0 = 1$, (a): $d = 4$; (b): $d = 0.4$. Наведено по два варіанти реалізацій для кожного d . Похилі прямі показують граничний ($d \rightarrow 0$) рух. Деталі розрахунку реалізацій наведено в Додатку А.1.

дження відрізку потрібно багато стрибків. В границі $d \rightarrow 0$ флюктуації повністю компенсуються, і час на проходження l стає точно рівним l/v_0 . Ефект “висереднення” флюктуацій проілюстровано на Мал. 3.2.

3.3 Випадкове блукання

Розглянемо ситуацію, коли в дискретній системі можливі випадкові стрибки як вліво, так і вправо, і знайдемо граничні рівняння для перехідних ймовірностей відповідної неперервної системи.

3.3.1 Блукання без дрейфу

Припустімо, що швидкості переходів у рівнянні (3.1) подаються таким чином:

$$r^-(x) \equiv r, \quad r^+(x) \equiv r. \quad (3.8)$$

Застосувавши скейлінг (3.3) і повторивши міркування, які привели до рівняння (3.5), одержуємо наступне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') = 0, \quad (3.9)$$

що означає відсутність будь-якої динаміки. Разом із тим, формула (1.69) свідчить: якщо частинку помістити в стан 0, то вона врешті решт побудує в стані N . Потрібний для цього середній час можна обчислити за формулою (1.69). Для нашого випадку $n = 0$, $r_k^\pm = r$, $\Lambda_k = 1$, отже,

$$W(0) = \frac{1}{r} \sum_{0 \leq l \leq N-1} \sum_{0 \leq k \leq l} 1 = \frac{1}{2r} (N^2 + N). \quad (3.10)$$

Динаміка, яка характеризується формулою (3.10), втрачена в рівнянні (3.9) в результаті граничного переходу зі скейлінгом (3.3). Причина цього зрозуміла з оцінки (3.10) — середня кількість стрибків, потрібних для проходження інтервалу $[0; Nd]$, зростає як N^2 , а кількість стрибків за одиницю часу зростає як N при $d \rightarrow 0$ при скейлінгу (3.3). В результаті при $d \rightarrow 0$ час, потрібний для проходження будь-якого скінченного відрізка, зростає до безмежності. Для збереження при $d \rightarrow 0$ середнього часу, потрібного для проходження скінчених інтервалів, оцінка (3.10) підказує наступний скейлінг:

$$r = \frac{r_0}{d^2}. \quad (3.11)$$

Підставимо останнє в рівняння (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') &= \\ &= r_0 \frac{1}{d} \left(\frac{1}{d} (p(x+d, t | x', t') - p(x, t | x', t')) - \frac{1}{d} (p(x, t | x', t') - \right. \\ &\quad \left. - p(x-d, t | x', t')) \right). \end{aligned}$$

Якщо припустити, що функція змінної $x \in R^1$, $p(x, t | x', t')$ двічі диференційована, то права частина останньої формулі збігається

до $r_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t | x', t')$, коли $d \rightarrow 0$. Отже, одержуємо наступне граничне рівняння

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') = r_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t | x', t').} \quad (3.12)$$

Граничні умови для рівняння (3.12), які випливають з граничних умов для рівняння (3.1), наступні:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} p(x, t | x', t') \right|_{x=x_m} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} p(x, t | x', t') \right|_{x=x_M} = 0.$$

Розв'язки рівняння типу (3.12) відомі з теорії рівнянь тепlopровідності і/або диффузії [19]. Зокрема, для початкових умов (3.6) і при $x_m = -\infty$, $x_M = \infty$, коли граничні умови відсутні, розв'язок дається наступним виразом:

$$\boxed{p(x, t | x', t') = \frac{\chi(t - t')}{\sqrt{4 \pi D (t - t')}} e^{-(x - x')^2 / (4D(t - t'))},} \quad (3.13)$$

де позначено $D = r_0$, $\chi(t)$ — функція Хевісайда.

Рівняння (3.12) — це найпростіший варіант рівняння Фоккера-Планка (див. [20]). Відповідний йому стохастичний процес, зокрема, описує рух броунівської частинки під дією випадкових поштовхів із боку молекул оточуючого середовища. В останньому випадку x означає координату частинки, а процес (3.12), (3.13) дає задовільний опис броунівського руху за умови, що частинка одержує значну кількість випадкових поштовхів, перш ніж ії координата може помітно змінитися². В цьому випадку $D = kT/6\pi a\eta$, де k — стала Больцмана, T — абсолютна температура, a — радіус сферичної частинки, η — коефіцієнт в'язкості середовища, в якому відбувається броунівський рух (див. [20]).

²Рівняння (3.12) може бути одержане не тільки граничним переходом $d \rightarrow 0$ з відповідним скейлінгом, але і виходячи з властивостей конкретних фізичних систем. Зокрема, такий вивід для броунівського руху дається в [20].

Середнє переміщення при броунівському русі

Припустімо, що броунівська частинка в момент часу s перебуває в точці y . Нас цікавить як далеко вона може опинитись у момент $t > s$. Середнє значення переміщення, тобто математичне сподівання $M(x - y)$, можна обчислити, користуючись формuloю (3.13):

$$M(x - y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - y) p(x, t | y, s) dx = 0,$$

оскільки $p(x, t | y, s)$ — парна функція від $x - y$. Таким чином, у середньому частинка не має тенденції до переміщення в певному напрямку. Разом із тим, унаслідок випадкових переміщень імовірність знайти частинку в околі початкової точки y буде зменшуватися з часом, як це можна з'ясувати за допомогою формули (3.13). Ця тенденція може бути охарактеризована через збільшення з часом середнього значення квадрату, або модуля переміщення. Для середнього квадрату маємо наступне:

$$M((x - y)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - y)^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-s)}} e^{-(x-y)^2/(4D(t-s))} dx,$$

або

$$M((x - y)^2) = 2D(t - s). \quad (3.14)$$

Для середнього модуля маємо:

$$M(|x - y|) = 2\sqrt{D(t - s)/\pi}. \quad (3.15)$$

Можна сказати, що частинка має тенденцію до ізотропного віддалення від початкової точки. Швидкість такого “віддалення в середньому” непостійна в часі. Як видно з (3.15), швидкість зменшується, коли t зростає. Разом із тим, ця швидкість необмежена в околі $t = s$. Таку поведінку можна пояснити наступним чином. Оскільки середня частота стрибків вліво дорівнює в даному випадку середній частоті стрибків вправо ($r^+ = r^-$), то віддалення

частинки від початкової точки більше, ніж на один стрибок, можливе тільки завдяки неповній взаємній компенсації (дисбалансу) стрибків наліво і направо. Такий дисбаланс можливий тому, що стрибки випадкові. На великих проміжках часу, коли повна кількість стрибків велика, з елементарної теорії ймовірностей [14] виходить: дисбаланс буде малим щодо повної кількості стрибків. Це дає малу швидкість збільшення відстані на довгих часах. З іншого боку, на малих часах відносний дисбаланс буде великим, що призводить до великої швидкості віddalenня. Зокрема, перший стрибок нічим не компенсується, що дає безмежну швидкість у стартовий момент. Оскільки ми розглядаємо стаціонарний випадок, то будь-який момент можна взяти за стартовий. Отже, швидкість “віddalenня в середньому” безмежна в будь-який момент, якщо його взято за початковий, а віddalenня — від точки, в якій частинка перебувала в цей момент. Напрямок цієї швидкості випадковий в кожен момент часу, тому за скінчений час середнє переміщення обмежене. З формул (3.15) також випливає, що середнє переміщення прямує до нуля, коли час $t-s$ прямує до нуля. Такі властивості середнього переміщення процесу броунівського руху відображаються також і у властивостях його реалізацій. А саме, майже всі реалізації процесу броунівського руху — неперервні функції часу. Доведення останнього можна знайти в [21].

3.3.2 Блукання з дрейфом

Припустімо, що швидкості переходів у рівнянні (3.1) подаються наступним чином:

$$r^-(x) \equiv r_0^-, \quad r^+(x) \equiv r_0^+, \quad (3.16)$$

де $r_0^- \neq r_0^+$.

Застосувавши скейлінг (3.3) і повторивши міркування, які привели до рівняння (3.5), одержуємо таке рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') = (r_0^- - r_0^+) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t | x', t'). \quad (3.17)$$

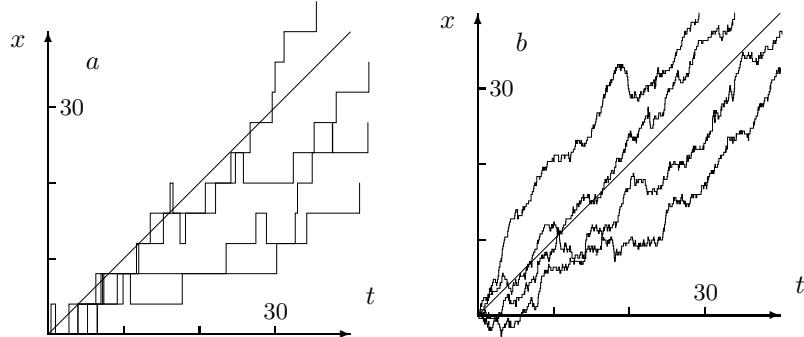
Одержане рівняння дає детерміністичну динаміку зі швидкістю $v_0 = r_0^+ - r_0^-$. Результат зрозумілий — нерівність середньої частоти стрибків наліво і направо дає тенденцію руху в певний бік. Разом із тим, оскільки стрибки випадкові, то тут можна було б очікувати певної випадковості граничного руху, яка виникає внаслідок флюктуацій темпу стрибків наліво і направо. При скейлінгу (3.3) рух внаслідок флюктуацій втрачається, для його збереження потрібен скейлінг (3.11). Використавши його в рівнянні (3.1), одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') &= \\ &= \frac{r_0^- - r_0^+}{d} \frac{1}{d} (p(x + d, t | x', t') - p(x, t | x', t')) + \\ &\quad + r_0^+ \frac{1}{d} \left(\frac{1}{d} (p(x + d, t | x', t') - p(x, t | x', t')) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{d} (p(x, t | x', t') - p(x - d, t | x', t')) \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тут другий доданок в правій частині рівняння при переходиті до границі $d \rightarrow 0$ дає другу похідну по x , аналогічно (3.12). Перший доданок міг би відповідати за постійний рух у певному напрямку, який виникає внаслідок нерівних швидкостей стрибків у різні сторони, аналогічно (3.6). Але він розбігається при $d \rightarrow 0$. При фіксованому $r_0^- - r_0^+$ величина $(r_0^- - r_0^+)/d$, яка характеризує різницю в темпі стрибків у протилежних напрямках, зростає необмежено, що призводить до безмежної швидкості руху в певному напрямку. Для одержання скінченної швидкості слід припустити, що різниця $r_0^- - r_0^+$ зменшується разом із d так, що

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{r_0^- - r_0^+}{d} = -v_0. \quad (3.19)$$

Останнє можна реалізувати, наприклад, поклавши $r_0^+ = r_0$, де r_0 не залежить від d , а $r_0^- = r(d)$, причому $r(d)$ прямує до r_0 , коли $d \rightarrow 0$ так, що виконано (3.19). З врахуванням сказаного можна перейти до границі в (3.18), в результаті чого одержується



Мал. 3.3. Приклади випадкових блукань із дрейфом. Тут $r_0 = 1 \text{ сек}^{-1}$, $v_0 = 1 \text{ сек}^{-1}$, (a): $d = 4$; (b): $d = 0.4$. Деталі розрахунку реалізацій наведено в Додатку А.3.

наступне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') = -v_0 \frac{\partial}{\partial x} p(x, t | x', t') + r_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t | x', t'). \quad (3.20)$$

Останнє рівняння також називається рівнянням Фоккера-Планка. Воно описує дрейф зі швидкістю v_0 і випадкові блукання частинки. Розв'язок рівняння (3.20) в безмежному просторі має такий вигляд:

$$p(x, t | x', t') = \frac{\chi(t - t')}{\sqrt{4\pi D(t - t')}} e^{-(x - v_0 t - x')^2 / (4D(t - t'))}. \quad (3.21)$$

Приклади випадкових блукань із дрейфом подано на Мал. 3.3.

Додаток А

A.1 Генерація випадкових чисел із заданим розподілом

Компілятори вихідних текстів із різних мов програмування і/або операційні системи містять вбудований генератор випадкових чисел. Генератор — це функція, `rand()`, яка повертає випадкове число. Якщо від функції `rand()` одержано значну кількість випадкових чисел, то вони розподілені рівномірно на деякому інтервалі¹. Інтервалом може бути відрізок дійсної осі $[0; 1]$, і тоді випадкові числа — дійсні (з плаваючою точкою). Інтервалом також може бути відрізок натурального ряду $\{0, 1, 2, \dots, \text{RAND_MAX}\}$, де `RAND_MAX` — найбільше випадкове число, яке генерується в певному компіляторі. Для компілятора `gcc`, за допомогою якого компілювалися всі наведені нижче програми, `RAND_MAX=2147483647` (файл `/usr/include/stdlib.h`). Зауважимо, що в комп'ютері відрізок дійсної осі $[0; 1]$ складається зі скінченної кількості чисел із плаваючою точкою. Тому між цілими і дробовими числами нема принципової відмінності. Перехід від набору випадкових чисел на $[0; 1]$ до чисел із $\{0, 1, 2, \dots, \text{RAND_MAX}\}$ і навпаки можна здійснити шляхом множення/ділення на `RAND_MAX`.

¹Справедливість цього твердження залежить від якості генератора випадкових чисел, оскільки насправді генеруються псевдовипадкові числа.

A.1.1 Метод відбору

Розглянемо функцію $[N * (\text{rand}() / \text{RAND_MAX})]$, де квадратні дужки позначають цілу частину (випадок, коли $\text{rand}() == \text{RAND_MAX}$, слід відкинути). В результаті послідовних викликів функції $[N * (\text{rand}() / \text{RAND_MAX})]$ буде одержано послідовність $\{n_i\}$, $i = 0, 1, \dots$ випадкових цілих чисел, рівномірно розподілених на $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Для одержання з множини $\{n_i\}$ нової множини чисел $\{m_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, розподілених на $\{0, 1, \dots, N-1\}$ за заданим законом, $p(n)$, слід відбирати числа з $\{n_i\}$ до $\{m_k\}$ ймовірністю чином так, що ймовірність числа n' , $n' \in \{n_i\}$ потрапити до $\{m_k\}$ пропорційна $p(n')$. Це можна здійснити наступним чином²: після одержання числа n' генерується допоміжне випадкове число a_n , рівномірно розподілене в множині чисел із плаваючою точкою $[0; M]$, де $M = \max_{k \in \{0, 1, \dots, N-1\}} p(k)$ і перевіряється умова $a_n \leq p(n')$. Якщо умова виконана, то n' потрапляє до $\{m_k\}$, якщо ж ні — відкидається, (див. Мал. A.1).

Нижче подано функцію `onenumber(N, M)`, яка генерує випадкові числа з множини $\{0, 1, \dots, N-1\}$, розподілені за законом $p(n)$. В якості аргументів функція одержує довжину відрізка цілих чисел, N , на якому розглядається розподіл, і найбільше значення, M , функції $p(n)$, повертає згенероване число.

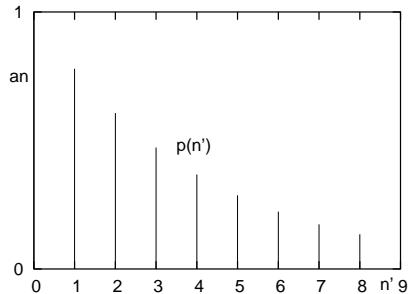
```
/* file onenumber.c */

#include <stdlib.h>
#include <math.h>

extern double p( int n );
/* функцію розподілу задано в іншому файлі */

/*
```

²При застосуванні цього способу може втрачатися значна кількість згенерованих випадкових чисел. Далі наведено спосіб, при якому числа не втрачаються.



Мал. А.1. Ілюстрація відбору випадкових чисел для одержання бажаного розподілу. Тут $p(n) = e^{-n/4}$, $N = 10$, $M = 1$. Число n відбирається, якщо точка з координатами (n, an) лежить не вище від графіка функції $p(n)$.

функція `onenumber(N, M)` генерує одне випадкове число так, що множина згенерованих чисел буде розподілена за законом $p(n)$, оголошеним вище.

*/

```
int onenumber(int N, double M)
{
    int n; /* ціле випадкове число */
    double an; /* допоміжне випадкове число */
    do
    {
        /* генеруємо ціле випадкове число,
           рівномірно розподілене на {0,1,...,N-1} */
        n =(int)(floor((float)N/(((float)RAND_MAX)*rand())));
        /* генеруємо допоміжне випадкове число,
           рівномірно розподілене на [0;M] */
        an = M/((double) RAND_MAX)*rand();
        /* перевіряємо умову an <= p(n),
           якщо виконана, то виводимо n
           якщо ні, то виконуємо цикл знову */
    } while(an > p(n));
    return n;
}
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.000	1.000	1.994	2.988	3.990	4.991	5.967	6.972	7.979	8.965
2	0.000	1.000	2.003	3.004	4.002	5.008	6.003	7.010	8.005	9.011
3	0.000	1.000	2.001	3.004	4.002	5.001	6.001	7.003	8.005	9.006

Табл. А.1. Відносні частоти появи чисел $\{0,1, \dots, 9\}$, згенерованих програмою rozpodil з $p(n) = n$. Рядкам з номерами 1, 2, 3 відповідають кількості згенерованих чисел $NP = 2 \cdot 10^6$, $NP = 2 \cdot 10^7$, $NP = 2 \cdot 10^8$.

```
якщо 'так', повертаємо знайдене n */
if ( an <= p(n) )    return(n);
}
while ( an > p(n) );
return(0);
}
```

Нижче подано приклад використання функції onenumber(N, M).
Команда для компіляції програми в середовищі Linux:

```
gcc rozpodil.c onenumber.c -lm
```

```
/* file rozpodil.c */
/*
Програма генерує випадкові цілі числа з множини значень
{0,1,...,N-1} з заданим імовірнісним розподілом p(n).
Команда для компіляції в середовищі Linux:
gcc-3.2.2 rozpodil.c onenumber.c -lm
*/
```

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>

extern int onenumber(int N, double M);
```

```
int NP = 200; /* кількість згенерованих чисел, - вкажіть,
   яка потрібна */
int N = 10; /* довжина множини значень, - вкажіть, яка
   потрібна */

/* функція розподілу p(n) ймовірності на множині значень
 {0,1,...,N-1}, вкажіть, яка потрібна. Нормованість
 на 1 функції p(n) тут необов'язкова */
double p( int n )
{
    return (double) n;
/* в цьому прикладі ймовірність одержати певне число
   пропорційна його величині */
}

int main()
{
    int i,n;
    double M = 0, vp; /* знаходимо найбільше
                           значення p(n), M */
    for (i=0; i<N; i++) { vp=p(i); M = vp > M ? vp:M; }
    printf("M=%f\n",M); /* друк для відлагодження */

    /* ініціалізація генератора випадкових чисел */
    srand((unsigned)time(NULL));

    /* генерація і друк на екран потрібних випадкових
       чисел */
    for (i=0; i<NP; i++)
    {
        n=onenumber(N, M);
        printf(" %d\n", n);
    }
    return 0;
}
```

Результати тестування цієї програми подано в Табл. А.1. Аналогічний алгоритм можна реалізувати і в тому випадку, коли потрібно генерувати дійсні випадкові числа y , розподілені на певному інтервалі з густину $g(y)$. Більш ефективним способом є метод відображення, описаний у наступних розділах.

A.1.2 Метод відображення

Ідея цього методу полягає в тому, що кожне згенероване випадкове число x_i використовується для обчислення нового числа $y_i = y(x_i)$, де функцію $y(x)$ вибрано так, що числа y_i розподілені за бажаним законом.

У загальній постановці задача виглядає наступним чином. Маємо множину випадкових чисел $\{x_i\}$, розподілених на відрізку $[a; b]$ з густину $f(x)$. Потрібно знайти таку функцію $y(x)$, що числа $\{y(x_i)\}$ будуть розподілені на відрізку $[c; d]$ з густину $g(y)$. Оскільки функції $f(x)$, $g(y)$ не від'ємні, то $y(x)$ — не спадна. Якщо функції $f(x)$, $g(y)$ скрізь додатні, то $y(a) = c$, $y(b) = d$.

При перетворенні $y(x)$ числа з відрізку $[x; x+dx]$ потрапляють у відрізок $[y(x); y(x+dx)] = [y(x); y(x)+dy]$, де $dy = y'(x) dx$, а їх кількість не змінюється. З означення густини $f(x) dx = g(y) dy$, або

$$\frac{dx}{dy} = \frac{g(y)}{f(x(y))},$$

де функція $x(y)$ — обернена до $y(x)$. Проінтегруємо останнє в межах c , y :

$$x(y) - a = \int_c^y \frac{g(s)}{f(x(s))} ds. \quad (\text{A.1})$$

З останнього можна знайти функцію $x(y)$ і $y(x)$ як обернену до неї. Рівняння (A.1) має виконуватися для всіх $c \leq y \leq d$, отже,

замість y можна підставити вираз $y(x)$. Тоді $x(y(x)) = x$ і

$$x - a = \int_c^{y(x)} \frac{g(s)}{f(x(s))} ds. \quad (\text{A.2})$$

Генератори випадкових чисел звичайно дають рівномірний розподіл. Тоді

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

і з (A.2) одержуємо

$$\frac{x-a}{b-a} = \int_c^{y(x)} g(s) ds. \quad (\text{A.3})$$

З останнього рівняння можна знайти $y(x)$. Це зроблено в розділі A.2.1, коли $g(s) = \lambda e^{-\lambda s}$ — густина розподілу міжімпульсних інтервалів для процесу Пуассона.

Дискретна версія

Якщо потрібно генерувати цілі числа, наприклад, із множини $\{0, 1, \dots, N\}$, розподілені з густиною $p(n)$, то метод відображення набуває наступного вигляду.

Зауважимо, що густину $p(n)$ можна нормувати так, що матимемо наступне:

$$\sum_{0 \leq n \leq N} p(n) = 1.$$

Розглянемо набір чисел $\{L_0, L_1, \dots, L_{N+1}\}$, утворених наступним чином:

$$L_0 = 0, \quad L_1 = p(0), \quad L_k = \sum_{0 \leq i < k} p(i), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad L_{N+1} = 1.$$

За допомогою функції (*double*)`rand()`/`RAND_MAX` генеруються випадкові числа x , розподілені рівномірно на $[0; 1]$. Кожне згенероване x відображається в число $n(x) \in \{0, 1, \dots, N\}$ за таким правилом:

$$L_i \leq x < L_{i+1} \Rightarrow n(x) = i.$$

A.2 Моделювання процесу Пуассона

Оскільки міжімпульсні інтервали для процесу Пуассона незалежні, то його реалізації можна моделювати на комп'ютері, виходячи з функції розподілу міжімпульсних інтервалів (2.10). А саме, для процесу з інтенсивністю λ слід генерувати довжини міжімпульсних інтервалів, t_n , $n = 1, 2, \dots$, розподілені з густинou (2.10). Конкретна реалізація одержується як кусково-стала функція $f(t)$, для якої $f(0) = 0$ і яка не міняється всередині інтервалів вигляду $[0; t_1]$, $[t_1; t_1 + t_2]$, $[t_1 + t_2; t_1 + t_2 + t_3]$, \dots і збільшується на одиницю на межах цих інтервалів.

При цьому виникають два питання. По-перше, якщо використовуються випадкові числа з множини $\{0, 1, \dots, \text{RAND_MAX}\}$, то з їх значеннями слід зіставити розмірні довжини часових інтервалів. Це можна зробити, вибравши розмірну “ціну поділки” `tic` так, що випадковому числу $0 \leq n \leq \text{RAND_MAX}$ відповідає часовий інтервал $n * \text{tic}$. При цьому теоретично неперервна множина міжімпульсних інтервалів буде моделюватися дискретним набором значень $0, \text{tic}, 2 * \text{tic}, \dots$. Функція розподілу (2.10) при цьому перейде в функцію `r(n) = exp(-λ*tic*n)`. По-друге, після вибору величини `tic` найбільший міжімпульсний інтервал, який можна одержати, — це $t_{max} = \text{RAND_MAX*tic}$. Можливість інтервалів більшої довжини не буде врахована. Частка цих інтервалів серед усіх інтервалів складає:

$$\int_{t_{max}}^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda dt = e^{-\lambda t_{max}}.$$

При великих λt_{max} ця частка може бути незначною. Тоді на вигляд короткого відрізка реалізації не вплине факт відкидання можливості появи міжімпульсних інтервалів, довших від t_{max} . З іншого боку, в точній (аналітичній) моделі ймовірність одержати міжімпульсний інтервал, довший від t_{max} , зростає лінійно з часом, упродовж якого моделюється процес. Це слід враховувати при оцінці точності чисельного моделювання. Для врахування довших міжімпульсних інтервалів можна збільшити значення tic , але при цьому моделювання неперервної множини $[0; t_{max}]$ набором дискретних значень буде більш грубим. Детальній аналіз цих проблем не входить у завдання цієї книжки.

Нижче наведено програму, яка генерує послідовність міжімпульсних інтервалів пуассонівського процесу за допомогою функції `onenumber`, описаної в попередньому підрозділі.

```
/* file realiz.c */
/*
Програма генерує міжімпульсні інтервали для процесу
Пуассона команда для компіляції:
gcc-3.2.2 realiz.c onenumber.c -lm
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>

extern int onenumber(int N, double M);

double lambda, tic;

/* функція розподілу p(n) ймовірності на множині значень
   {0,1,...,N}, */
double p( int n )
{

```

```

return(exp(-lambda*(double)n*tic));
/* нормування на 1 не обов'язкове */
}

int main()
{
lambda = 100; /* , 1/сек, параметр відповідного
                  пуссонівського процесу */
int N = RAND_MAX; /*довжина множини цілих випадкових
                    чисел*/
double dur = 100; /* , сек, проміжок, на якому
                    моделюється процес */
tic = 1.5*dur/RAND_MAX; /*, сек, "ціна поділки",
                           вибрано так, що випадковому числу
                           RAND_MAX відповідає інтервал 1.5*dur */
double tim = 0; /* , сек, поточний момент */
int NP = 0; /* поточна кількість імпульсів */

int i, n;
double M = 1; /* вказуємо найбільше значення p(n), M */
double intrv; /*сек, поточна довжина згенерованого
                  інтервалу*/
srand((unsigned)time(NULL)); /* ініціалізація генератора
                               випадкових чисел */

while ( tim < dur )
{
    n = onenumber(N, M); /* генерація випадкового
                           числа */
    NP++;
    intrv = (double)n*tic;
    tim += intrv;
    printf("%f\n", intrv); /* друк на екран випадкових
                           інтервалів */
}

```

```

double nM = tim/NP; /* середня довжина згенерованих
                     інтервалів */
double tM = 1./lambda; /* теоретична середня довжина
                         інтервалів */
printf("\nТеоретичне середнє, T = %f,\n"
      "\nСереднє в згенерованому наборі tM= %f,\n"
      "\nТеоретична кількість імпульсів lambda*dur=%d,\n"
      "\nКількість імпульсів у згенерованому наборі\n"
      "NP=%d\n", tM, nM, (int)(lambda*dur), NP);
return 0;
}

```

Для генерації зразків траекторій, зображеніх на Мал. 3.2, слід врахувати, що в розглянутій системі моменти стрибків описуються при $x_M = \infty$ пуассонівським процесом з $\lambda = \frac{v_0}{d}$. (Порівняти рівн. (2.2) і (3.4)). Отже, можна будувати реалізації процесу за методом, описаним на с. 13 на основі багатомоментних функцій розподілу. Останні можна збудувати за формулою (1.6), використавши перехідні ймовірності (2.3). Можна також використати наведену вище програму для генерації послідовності міжімпульсних інтервалів для пуассонівського процесу, що і було зроблено. Випадкова динаміка моделюється на проміжку часу від 0 до 40 сек. Неперервна множина значень довжин міжімпульсних інтервалів моделюється на комп’ютері як набір чисел розташованих еквідistantно з кроком $tic = 60/RAND_MAX:\{0, tic, 2*tic, \dots, 60\}$. Для побудови Мал. 3.2(a) взято $v_0 = 1/\text{сек}$, $d = 4$ і згенеровано 10 міжімпульсних інтервалів³; для побудови Мал. 3.2(b) взято $v_0 = 1/\text{сек}$, $d = 0.4$ і згенеровано 100 міжімпульсних інтервалів.

³ d вважаємо безрозмірними.

A.2.1 Метод відображення

Використовуємо метод, описаний в п.А.1.2. Для множини міжімпульсних інтервалів пуассонівського процесу $c = 0$, $d = \infty$. Покладемо $a = 0$, $b = 1$, $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Тоді з (A.3) маємо

$$x = \int_0^{y(x)} \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

З останнього одержуємо

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x). \quad (\text{A.4})$$

Нижче наведено програму, яка генерує послідовність міжімпульсних інтервалів пуассонівського процесу методом відображення за допомогою функції (A.4). Випадкові числа, рівномірно розподілені на $[0; 1]$, — це числа $\{0, 1/\text{RAND_MAX}, 2/\text{RAND_MAX}, \dots, (\text{RAND_MAX} - 1)/\text{RAND_MAX}\}$. Найбільший міжімпульсний інтервал, який можна одержати (не застосовуючи скейлінгу), — $t_{max} = \ln(\text{RAND_MAX})/\lambda$.

```
/* file vid_realiz.c */
/*
Програма генерує міжімпульсні інтервали для процесу
Пуассона
команда для компіляції: gcc-3.2.2 vid_realiz.c -lm
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>

double lambda; /* 1/sec */
```



```

    }

    double nM = tim/NP; /* середня довжина згенерованих
                           інтервалів */
    double tM = 1./lambda; /* теоретична середня довжина
                           інтервалів */

    printf("\nТеоретичне середнє, T = %f,\n"
           "Середнє в згенерованому наборі tM= %f,\n"
           "Теоретична кількість імпульсів lambda*dur=%d,\n"
           "Кількість імпульсів у згенерованому наборі NP=%d\n"
           "Кількість перевищень NE=%d\n",
           tM, nM, (int)(lambda*dur), NP,NE);
    return 0;
}

```

A.2.2 Метод сортування

Зауважимо, що з означення процесу Пуассона випливає, що ймовірність одержати імпульс у певний момент часу t не залежить від t і від того, як розташовані попередні імпульси. Звідси виходить: моменти появи імпульсів на відрізку $[0; T]$ — це набір випадкових чисел, розподілених зі сталою густину λ . Отже, згенерувавши λT випадкових чисел, рівномірно розподілених на $[0; T]$, ми одержимо можливу реалізацію пуассонівського процесу, якщо розташуємо ці числа в порядку зростання (відсортуємо). Валідність цього методу залежить від того, як буде вживатись одержана послідовність. Зокрема, набір часових моментів, згенерований однократно, може дати належне уявлення про взаємне розташування в часі елементарних подій пуассонівського процесу (див. Мал. A.2). Разом із тим, якщо набір моментів на даному інтервалі генерується багаторазово, то слід врахувати, що повне число імпульсів n на певному інтервалі не обов'язково рівне λT , а є випадковою величиною, розподілена за законом (2.4). Ми не з'ясовуємо тут, чи врахування цього факту є достатнім, щоб згенерувати всі можливі розподіли елементарних подій пуассонівського процесу.

нівського процесу заданої інтенсивності λ на інтервалі T .

Нижче наведено програму, яка реалізує даний метод і часткову чисельну перевірку його валідності. Перевірка виконується наступним чином. Якщо інтервали розподілено з густинou

$$p(t)dt = e^{-\lambda t} \lambda dt,$$

то доля інтервалів, тривалість яких не перевищує X , дається виразом

$$Q(X) = \int_0^X p(t)dt = 1 - e^{-\lambda X}. \quad (\text{A.5})$$

Доля відповідних інтервалів $QE(X)$ в згенерованій послідовності обчислюється в програмі і знаходиться відносна похибка er порівняно з теоретичним значенням⁴.

```
/* file rivn_realiz.c */
/*
Програма генерує послідовність моментів подій
пуассонівського процесу інтенсивності lambda
на інтервалі T методом сортування набору
випадкових чисел, розподілених рівномірно на T.
Команда для компіляції в середовищі Linux:
    gcc rivn_realiz.c -lm
*/
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

int main()
{
    double lambda=10.; /* 1/сек, інтенсивність
```

⁴У програмі застосовано простий метод сортування з метою наочності. Для великих значень N цей метод неефективний, і замість нього слід вживати алгоритми швидкого сортування, які можна знайти в книжці [22].

```

пуасс. проц. */
double T=10.; /* сек, проміжок, на якому моделюється
    пуасс. проц. */
int N=ceil(lambda*T); /* повне число імпульсів */

double times[N]; /* моменти імпульсів */
double t; /* поточний момент */
int i,k;

for (i=0; i<N; i++) times[i]=0.;

srand ((unsigned int) time(NULL));

times[N-1]=(double)rand()/(double)RAND_MAX*T;

printf("\n\ntimes:\n");

for (i=N-1; i>0; i--)
{
    t=(double)rand()/(double)RAND_MAX*T; /*генерація
        моменту*/
    k=i; /* запис його в масив у порядку зростання */
    while (t>times[k])
    {
        times[k-1]=times[k];
        k++;
        if (k==N) break;
    }
    times[k-1]=t;
    printf("i=%d; ",i);
    printf("t=%f\n",t);
}
printf("\n\nmoments:\n"); /* друк на екран */
for (i=0; i<N; i++) printf("\n\ttimes[%d]=%f",i,times[i]);

```

```
/* нижче - перевірка експонентного розподілу
   міжімпульсних інтервалів */

/*
Обчислюються міжімпульсні інтервали і доля інтервалів,
тривалість яких не перевищує X, - див. пояснення в
тексті.
*/

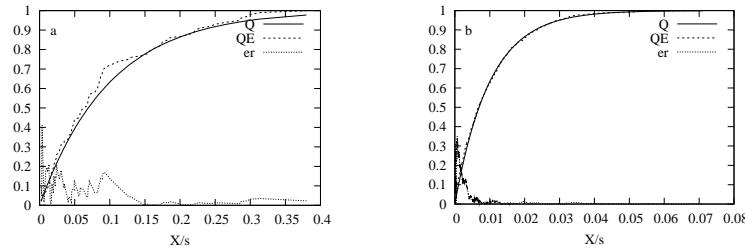
double ints[N-1]; /* масив інтервалів */
double it; /* поточний інтервал */
for (i=0; i<N-1; i++) ints[i]=0.;

ints[N-2]=times[N-1] - times[N-2];

for (i=N-2; i>0; i--)
{
    it=times[i] - times[i-1]; /* обчислення інтервалу */
    k=i; /* запис його в масив в порядку зростання */
    while (it>ints[k])
    {
        ints[k-1]=ints[k];
        k++;
        if (k==N-1) break;
    }
    ints[k-1]=it;
}

printf("\n\nintervals:\n"); /* друк на екран */
for (i=0; i<N-1; i++) printf("\nints[%d]=%f",i,ints[i]);

double Q; /* теоретичне значення */
double QE; /* експериментальне значення */
double er; /* відносна похибка */
```



Мал. А.2. Перевірка валідності методу сортування. Тут $\lambda = 10$ (а) і 100 (б) $1/c$, $T = 10$ с, Q розраховано за формулою (А.5), QE і відносна похибка er розраховані за програмою `gvn_realiz.c`.

```

printf("\n\nerrors:\n");

for (i=0; i<N-1; i++)
{
    Q = 1. - exp(-lambda*ints[i]); /* обчислення
                                    Q(ints[i]) */
    QE = (double)(i+1)/(double)(N-1);/*обчислення
                                    QE(ints[i])*/
    er = fabs(Q-QE)/QE; /* обчислення відносної похибки
                           в точці X = ints[i] */
    printf("%f\n",er);
}
printf("\nTotal # of moments, N=%d\n",N);
}

```

A.3 Моделювання випадкових блукань

Алгоритм для моделювання випадкових блукань із дрейфом можна побудувати, спираючись на рівняння (3.18), яке перепишемо

наступним чином

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') &= \frac{r_0^-}{d^2} (p(x + d, t | x', t') - p(x, t | x', t')) - \\ &- \frac{r_0^+}{d^2} (p(x, t | x', t') - p(x - d, t | x', t')) . \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Так само, як і в попередньому підрозділі, неперервний проміжок часу моделюється дискретним набором значень `0`, `tic`, `2 * tic`, `3 * tic ...`, `RAND_MAX*tic`, де `tic` — розмірна "ціна поділки". Вибраний скейлінг (3.11) гарантує, що інтенсивність випадкових блукань буде незмінною при зміні масштабу скейлінгу d . Нерівність величин r_0^+ і r_0^- забезпечує дрейф у певному напрямку. Для того, щоб швидкість дрейфу зберігалась при зміні масштабу d , слід забезпечити виконання умови (3.19). Останнє можна досягти, наприклад, поклавши $r_0^+ = r_0$, де r_0 не залежить від d , а $r_0^- = r_0 - d * v_0$, де v_0 — бажана швидкість дрейфу. Отже, в програмі слід задати час `dur`, протягом якого моделюється процес, ціну поділки `tic`, швидкість стрибків вправо `r0`($= r_0$), величину стрибка (скейлінг) d і швидкість дрейфу `v0`($= v_0$).

За змістом, який випливає зі способу виводу рівняння (A.6) (див. (1.14), (1.15), (1.16)), це рівняння описує частинку, яка рухається вузлами лінійного графу, здійснюючи стрибки наліво або направо в сусідній вузол у випадкові моменти часу. Час очікування стрибка вправо розподілений за законом $e^{-t r_0^+ / d^2} \frac{r_0^+}{d^2} dt$, вліво — $e^{-t r_0^- / d^2} \frac{r_0^-}{d^2} dt$. Це визначає алгоритм чисельного моделювання реалізацій процесу (A.6). На першому кроці слід згенерувати два випадкових числа, n_1 і n_2 , розподілених за законом $p_1(n) = e^{-\lambda_1 n \cdot tic} \lambda_1$ і $p_2(n) = e^{-\lambda_2 n \cdot tic} \lambda_2$ відповідно, де $\lambda_1 = r_0^+ / d^2$, $\lambda_2 = r_0^- / d^2$, відповідно. Якщо $n_1 < n_2$, то частинка стрибає вправо після очікування $n_1 \cdot tic$ одиниць часу, число n_2 замінюється на $n_2 - n_1$ і генерується нове число n_1 . Якщо $n_2 < n_1$ (при старому n_1), то частинка стрибає вліво після очікування $n_2 \cdot tic$ одиниць часу, число n_1 замінюється на $n_1 - n_2$ і генерується нове число n_2 . Наступний крок розпочинається з порівняння чисел в одержаний

новій парі (n_1, n_2) і продовжується аналогічно попередньому.

Нижче наведено програму, яка реалізує описаний алгоритм. При цьому для генерації міжімпульсних інтервалів пуассонівського процесу застосовується метод відображення, описаний у п. А.2.1.

```

/* file realiz3.c */
/*
Програма генерує міжстрибкові інтервали і розташування
частинки для процесу двосторонніх стрибків із різним
темпом стрибків вліво і вправо. Для генерації
міжімпульсних інтервалів пуассонівського процессу
застосовано метод відображення.

Команда для компіляції в середовищі Linux:
gcc realiz3.c -lm
*/
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>

double lambda1, lambda2, tic;

/* генератор міжімпульсних інтервалів
пуассонівського процесу з інтенсивністю lambda */
double iv( double lambda )
{
    double x;
    x = (double)rand() / RAND_MAX; /* генерація випадкового
числа на [0;1[ */
    while (x == 1.)
        x = (double)rand() / RAND_MAX; /* повторні
спроби, якщо x=1 */

```

```
return(-1./lambda*log(1.-x)); /* відображення x для
забезпечення потрібного розподілу */
}

int main()
{
    double dur = 40; /* , сек, проміжок, на якому
        моделюється процес */
    double r0 = 1; /* , 1/сек */
    double d = 0.01; /* безрозмірне, довжина стрибка */
    double v0 = 1.; /* , 1/сек, швидкість дрейфу */
    lambda1 = r0/(d*d); /* , 1/сек, "темп" стрибків
        вправо */
    lambda2 = lambda1 - v0/d; /* , 1/сек, "темп" стрибків
        вліво */
    if (lambda2<=0.)
    {
        printf("\nlambda2=%f",lambda2);
        exit(1);
    }

    long N = RAND_MAX; /*довжина множини цілих випадкових
        чисел*/
    tic = 1.5*dur/RAND_MAX; /*, сек, "ціна поділки", вибрано
        так, що випадковому числу RAND_MAX відповідає інтервал
        1.5*dur */

    double tim = 0; /* , сек, поточний момент */
    int NP1=0; /* поточна кількість стрибків вправо */
    int NP2=0; /* поточна кількість стрибків вліво */
    int s=0; /* поточне положення частинки (номер вузла на
        графі) */
    double intrv1, intrv2; /* , сек, поточна довжина
        згенерованого інтервалу */
```

```
double M=1; /* вказуємо найбільше значення p1(n), p2(n),
               M */

rand((unsigned)time(NULL));
/* ініціалізація генератора випадкових чисел */

intrv1 = iv( lambda1 ); /* час очікування першого
                           стрибка вправо */
intrv2 = iv( lambda2 ); /* час очікування першого
                           стрибка вліво */

while ( tim < dur )
{
    if (intrv1 < intrv2)
    {
        s++; /* стрибок вправо */
        NP1++;
        tim += intrv1;
        intrv2 -= intrv1; /* час очікування стрибка
                           вліво зменшується */
        intrv1 = iv( lambda1 ); /* наступний час
                           очікування стрибка вправо */
    }
    else
        if (intrv2 < intrv1)
        {
            s--; /* стрибок вліво */
            NP2++;
            tim += intrv2;
            intrv1 -= intrv2; /* час очікування стрибка
                               вправо зменшується */
            intrv2 = iv( lambda2 ); /* наступний час
                               очікування стрибка вліво */
        }
    else
```


Додаток В

B.1 Обчислення асимптотики для ППЛ

Формулу (2.13), враховуючи позначення $X = \lambda t$, подамо в наступному вигляді:

$$I_t \ln 2 = X - X \ln X + \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} \ln(n!).$$

Перетворимо $\ln(n!)$ в останньому виразі за допомогою формули Стрілінга в наступній формі [14]:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\Theta(n)}, \quad \text{де } |\Theta(n)| \leq \frac{1}{12n}. \quad (\text{B.1})$$

В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} I_t \ln 2 &= X - X \ln X + \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} \ln \sqrt{2\pi n} + \\ &+ \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} n \ln n - \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} n + \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} \Theta(n). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Передостання сумма в (B.2) перетворюється наступним чином:

$$\sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} n = X \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = X,$$

що при врахуванні в (B.2) дає

$$\begin{aligned}
 I_t \ln 2 &= \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} \ln \sqrt{2\pi n} + \\
 &\quad \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} n \ln n - X \ln X + \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} \Theta(n) = \\
 &= \psi(X) + \phi(X) + \theta(X), \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \psi(X) &= \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} \ln \sqrt{2\pi n}, \\
 \phi(X) &= \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} n \ln n - X \ln X, \\
 \theta(X) &= \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} \Theta(n).
 \end{aligned}$$

Величина $\theta(X)$ оцінюється наступним чином:

$$\begin{aligned}
 |\theta(X)| &\leq \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^n}{n!} \frac{1}{12n} = \frac{1}{12X} \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &< \frac{1}{12X} + \frac{1}{12X} \sum_{n \geq 1} e^{-X} \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{n} < \frac{1}{6X}. \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

Для оцінки $\phi(X)$ подамо цей вираз у такому вигляді:

$$\phi(X) = X e^{-X} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \ln \frac{n+1}{X}, \tag{B.5}$$

і використаємо нерівність

$$1 - \frac{1}{\delta} \leq \ln \delta \leq \delta - 1, \tag{B.6}$$

справедливу для всіх $\delta > 0$. Зокрема, (B.6) дає

$$1 - \frac{X}{n+1} \leq \ln \frac{n+1}{X} \leq \frac{n+1}{X} - 1,$$

що при використанні в (B.5) дає:

$$Xe^{-X} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \left(1 - \frac{X}{n+1} \right) \leq \phi(X) \leq Xe^{-X} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \left(\frac{n+1}{X} - 1 \right). \quad (\text{B.7})$$

Ряди в (B.7) сходяться абсолютно, звідки для лівої частини маємо:

$$Xe^{-X} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \left(1 - \frac{X}{n+1} \right) = Xe^{-X}. \quad (\text{B.8})$$

Права частина в (B.7) перетворюється наступним чином:

$$\begin{aligned} Xe^{-X} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \left(\frac{n+1}{X} - 1 \right) &= \\ &= Xe^{-X} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \left(\frac{n}{X} + \frac{1}{X} \right) - e^X \right) = \\ &= Xe^{-X} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{X} e^X - e^X \right) = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Підстановка (B.8) і (B.9) в (B.7) дає:

$$Xe^{-X} \leq \phi(X) \leq 1. \quad (\text{B.10})$$

Функція $\psi(X)$ перетворюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \psi(X) &= e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \left(\ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln n \right) = \\ &= (1 - e^{-X}) \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln n. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Останній вираз в (B.11) перетворимо наступним чином

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln n = \\
 &= \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \ln(n+1) - \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln \frac{n+1}{n} = \\
 &= \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \ln(n+1) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln X + \frac{1}{2} \ln X - \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\
 &= \frac{1}{2X} \phi(X) + \frac{1}{2} \ln X - \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

Тут перший доданок оцінюється через (B.10). Для оцінки третього доданка використаємо нерівність (B.6) в формі

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Останнє дає:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \frac{1}{n} \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & \frac{1}{2X} e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \frac{1}{n} \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & \frac{1}{2X} (1 - e^{-X} - Xe^{-X}) \leq \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \frac{1}{n}. \quad (\text{B.13})
 \end{aligned}$$

Для оцінки правої частини в (B.13) перетворимо її наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \frac{1}{n} &= \\ &= \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{(n+1)!} + \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{(n+1)!} \frac{1}{n} < \\ &< \frac{1}{X}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{X} (1 - e^{-X} - Xe^{-X}) . \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

Використавши (B.14) в (B.13), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2X} (1 - e^{-X} - Xe^{-X}) &\leq \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \\ &< \frac{1}{X} (1 - e^{-X} - Xe^{-X}) . \end{aligned}$$

Використавши останнє в (B.12), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2X} \phi(X) + \frac{1}{2} \ln X - \frac{1}{X} (1 - e^{-X} - Xe^{-X}) &< \\ &< \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln n < \\ &\frac{1}{2X} \phi(X) + \frac{1}{2} \ln X - \frac{1}{2X} (1 - e^{-X} - Xe^{-X}) . \end{aligned}$$

Використавши в останньому (B.10), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-X} + \frac{1}{2} \ln X - \frac{1}{X} (1 - e^{-X} - Xe^{-X}) &< \frac{1}{2}e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n!} \ln n < \\ &< \frac{1}{2X} + \frac{1}{2} \ln X - \frac{1}{2X} (1 - e^{-X} - Xe^{-X}) = \frac{1}{2} \ln X + \frac{1}{2X}e^{-X} + \frac{1}{2}e^{-X} . \end{aligned}$$

Використавши останнє в (B.11), маємо:

$$\begin{aligned}
 (1 - e^{-X}) \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln X + \frac{3}{2} e^{-X} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X} e^{-X} &< \\
 &< \psi(X) < \\
 (1 - e^{-X}) \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln X + \frac{1}{2X} e^{-X} + \frac{1}{2} e^{-X}. \\
 &\Updownarrow \\
 \ln \sqrt{2\pi X} - \frac{1}{X} + e^{-X} \left(\frac{1}{X} + \frac{3}{2} - \ln \sqrt{2\pi} \right) &< \\
 &< \psi(X) < \quad (\text{B.15}) \\
 &< \ln \sqrt{2\pi X} + e^{-X} \left(\frac{1}{2X} + \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2\pi} \right).
 \end{aligned}$$

Використаємо (B.4), (B.10), (B.15) в (B.3):

$$\begin{aligned}
 \ln \sqrt{2\pi X} - \frac{1}{X} + e^{-X} \left(\frac{1}{X} + \frac{3}{2} - \ln \sqrt{2\pi} \right) + X e^{-X} - \frac{1}{6X} &< \\
 &< I_t \ln 2 < \\
 &< \ln \sqrt{2\pi X} + e^{-X} \left(\frac{1}{2X} + \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2\pi} \right) + 1 + \frac{1}{6X}.
 \end{aligned}$$

Останнє визначає асимптотичну поведінку I_t наступним чином:

$$I_t = \log_2 \sqrt{2\pi X} + \eta(X) \log_2 e, \quad (\text{B.16})$$

де функція $\eta(X)$ задовольняє нерівності

$$\begin{aligned}
 -\frac{7}{6X} + e^{-X} \left(\frac{1}{X} + \frac{3}{2} - \ln \sqrt{2\pi} + X \right) &< \eta(X) < \\
 &< 1 + \frac{1}{6X} + e^{-X} \left(\frac{1}{2X} + \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2\pi} \right). \quad (\text{B.17})
 \end{aligned}$$

B.2 Обчислення границі для ЦПЛ

Для доведення (2.23) нам знадобляться наступні формули:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \cos(n\varphi) &= e^{X \cos \varphi} \cos(X \sin \varphi), \\ \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} \sin(n\varphi) &= e^{X \cos \varphi} \sin(X \sin \varphi), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

які можна доводити одночасно, використавши формулу $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$, де φ — дійсне, $i = \sqrt{-1}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} e^{in\varphi} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(Xe^{i\varphi})^n}{n!} = \\ &= \exp(Xe^{i\varphi}) = \exp(X \cos \varphi + iX \sin \varphi) = \\ &= e^{X \cos \varphi} (\cos(X \sin \varphi) + i \sin(X \sin \varphi)). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Розглянувши в останньому окрім дійсну і уявну частини, одержимо формули (B.18). Наступне допоміжне твердження полягає в тому, що будь-яку періодичну функцію $f(n)$ від натурального аргументу n з періодом k можна подати у вигляді

$$f(n) = \sum_{0 \leq m < k} a_m e^{i \frac{2\pi}{k} mn}, \quad n = 0, 1, \dots, k-1, \quad (\text{B.20})$$

де a_m , $m = 0, 1, \dots, k-1$ — комплексні числа. Для доведення зауважимо, що (B.20) можна трактувати як систему k лінійних рівнянь відносно k невідомих, a_0, a_1, \dots, a_{k-1} . З теорії таких систем відомо, що (B.20) має єдиний розв'язок при будь-якому наборі значень $\{f(0), f(1), \dots, f(k-1)\}$, якщо матриця A коефіцієнтів

при невідомих — неособлива. Ця матриця має наступний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{k}} & e^{i\frac{2\pi}{k}2} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{k}(k-1)} \\ 1 & e^{2i\frac{2\pi}{k}} & e^{2i\frac{2\pi}{k}2} & \dots & e^{2i\frac{2\pi}{k}(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{(k-1)i\frac{2\pi}{k}} & e^{(k-1)i\frac{2\pi}{k}2} & \dots & e^{(k-1)i\frac{2\pi}{k}(k-1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Для доведення неособливості матриці A вкажемо явний вигляд оберненої до неї матриці A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{k}} & e^{-i\frac{2\pi}{k}2} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{k}(k-1)} \\ 1 & e^{-2i\frac{2\pi}{k}} & e^{-2i\frac{2\pi}{k}2} & \dots & e^{-2i\frac{2\pi}{k}(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-(k-1)i\frac{2\pi}{k}} & e^{-(k-1)i\frac{2\pi}{k}2} & \dots & e^{-(k-1)i\frac{2\pi}{k}(k-1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Перевіримо взаємну оберненість цих матриць:

$$(A^{-1}A)_{lm} = \sum_{0 \leq n < k} (A^{-1})_{ln} A_{nm} = \frac{1}{k} \sum_{0 \leq n < k} e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)n} = B_{lm}.$$

Очевидно, $B_{mm} = 1$ для всіх m . Якщо $m \neq l$, то $e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)} \neq 1$ і

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)} B_{lm} &= \frac{1}{k} \sum_{0 \leq n < k} e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)(n+1)} = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{1 \leq n \leq k} e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)n} = \frac{1}{k} \sum_{0 \leq n < k} e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)n} = B_{lm}, \end{aligned}$$

оскільки $e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)0} = e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)k}$. Отже,

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{k}(m-l)} - 1 \right) B_{lm} = 0,$$

звідки виходить, що $B_{lm} = 0$ при $m \neq l$. Таким чином, матриці (B.21) і (B.22) взаємно обернені. Коефіцієнти a_m в (B.20) знаходяться за формулами

$$a_m = \sum_{0 \leq n < k} (A^{-1})_{mn} f(n) = \frac{1}{k} \sum_{0 \leq n < k} e^{-i\frac{2\pi}{k}mn} f(n),$$

зокрема

$$a_0 = \frac{1}{k} \sum_{0 \leq n < k} f(n).$$

Використовуючи (B.18) і (B.19), маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} f(n) &= \sum_{0 \leq m < k} a_m \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} e^{i\frac{2\pi}{k}mn} = \\ &= \sum_{0 \leq m < k} a_m e^{X \cos \frac{2\pi}{k}m} (\cos(X \sin \frac{2\pi}{k}m) + i \sin(X \sin \frac{2\pi}{k}m)). \end{aligned} \tag{B.23}$$

Зауважимо, що для всіх $m \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ $\cos \frac{2\pi}{k}m < 1$. Звідси і (B.23) випливає, що

$$\lim_{X \rightarrow \infty} e^{-X} \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!} f(n) = a_0 = \frac{1}{k} \sum_{0 \leq n < k} f(n).$$

Отже, (2.23) доведено.

B.3 Обчислення асимптотики для ЦПЛІ

Перепишемо (2.40) в наступному вигляді

$$(I_t^{c^i} - I_t) \ln 2 = -e^{-X} \sum_{n \geq 1} \sum_{0 \leq j < k} -\frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \left(\frac{nk}{X} \right)^j - e^{-X} \sum_{n \geq 1} \sum_{0 \leq j < k} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \left(\sum_{0 \leq i < k} \left(\frac{X}{nk} \right)^i \frac{(nk)^i (nk+j)!}{(nk)^j (nk+i)!} \right). \quad (\text{B.24})$$

Розглянемо вираз (B.24). Він складається з k доданків, які одержуються фіксацією певного значення j . Доведемо, що кожен з цих доданків прямує до нуля, коли $X \rightarrow \infty$. Використаємо для цього наступну нерівність:

$$1 - \frac{X}{nk} \leq \ln \frac{nk}{X} \leq \frac{nk}{X} - 1. \quad (\text{B.26})$$

Застосуємо праву частину (B.26) в (B.24):

$$\begin{aligned} e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \frac{nk}{X} &\leq e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \left(\frac{nk}{X} - 1 \right) = \\ &= e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j-1}}{(nk+j-1)!} \frac{nk}{nk+j} - e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

оскільки тут перший доданок прямує до $\frac{1}{k}$, а другий — до $-\frac{1}{k}$ при $X \rightarrow \infty$. Застосуємо ліву частину (B.26) в (B.24):

$$\begin{aligned} e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \frac{nk}{X} &\geq e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \left(1 - \frac{X}{nk} \right) = \\ &= e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} - e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j+1}}{(nk+j+1)!} \frac{nk+j+1}{nk} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

аналогічно попередньому. Останні дві граници доводять, що вираз (B.24) прямує до нуля, коли $X \rightarrow \infty$.

Оцінимо тепер вираз (B.25). Застосуємо праву частину нерівності (B.6) до частини (B.25) з фіксованим j :

$$\begin{aligned} & e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \left(\sum_{0 \leq i < k} \left(\frac{X}{nk} \right)^i \frac{(nk)^i (nk+j)!}{(nk)^j (nk+i)!} \right) \leq \\ & e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \left(\sum_{0 \leq i < k} \left(\frac{X}{nk} \right)^i \frac{nk}{nk+1} \cdots \frac{nk}{nk+i} \frac{nk+1}{nk} \cdots \frac{nk+j}{nk} - 1 \right) = \\ & \sum_{0 \leq i < k} e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j+i}}{(nk+j+i)!} \frac{nk+j+1}{nk} \cdots \frac{nk+j+i}{nk} \frac{nk}{nk+1} \cdots \frac{nk}{nk+i} \frac{nk+1}{nk} \cdots \frac{nk+j}{nk} \\ & - e^{-X} \sum_{n \geq 1} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!}. \end{aligned}$$

Тут частина, яка відповідає фіксованому i , прямує до $\frac{1}{k}$, коли $X \rightarrow \infty$. Отже, оцінка

$$\begin{aligned} & e^{-X} \sum_{\substack{0 \leq j < k \\ n \geq 1}} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \left(\sum_{0 \leq i < k} \left(\frac{X}{nk} \right)^i \frac{(nk)^i (nk+j)!}{(nk)^j (nk+i)!} \right) \leq \\ & \leq k - 1. \quad (\text{B.27}) \end{aligned}$$

Для оцінки цього ж виразу знизу використаємо опуклість логарифмічної функції:

$$\ln \left(\frac{1}{k} \sum_{0 \leq i < k} a_i \right) \geq \frac{1}{k} \sum_{0 \leq i < k} \ln a_i,$$

або, після заміни $a_i \rightarrow ka_i$

$$\ln \sum_{0 \leq i < k} a_i \geq \ln k + \frac{1}{k} \sum_{0 \leq i < k} \ln a_i.$$

Застосувавши останнє до (B.25), одержимо

$$e^{-X} \sum_{\substack{0 \leq j < k \\ n \geq 1}} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \left(\sum_{0 \leq i < k} \left(\frac{X}{nk} \right)^i \frac{(nk)^i (nk+j)!}{(nk)^j (nk+i)!} \right) \geq \ln k +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{k} \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k \\ n \geq 1}} e^{-X} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \left(\frac{X}{nk} \right)^i + \\
& + \frac{1}{k} \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k \\ n \geq 1}} e^{-X} \frac{X^{nk+j}}{(nk+j)!} \ln \frac{(nk)^i (nk+j)!}{(nk)^j (nk+i)!}.
\end{aligned}$$

Тут вираз у передостанньому рядку прямує до нуля аналогічно (B.24), а вираз в останньому рядку прямує до нуля, оскільки в ньому дріб, який стоїть під логарифмом, прямує до одиниці, коли $n \rightarrow \infty$. Врахувавши останнє і (B.27) в (B.24), (B.25), одержимо оцінку (2.41):

$$-k + 1 \leq (I_t^{c_i} - I_t) \ln 2 \leq -\ln k,$$

справедливу з точністю до величин, які прямають до нуля, коли $t \rightarrow \infty$.

Додаток С

C.1 Допоміжна границя для зв'язуючого нейрона з $N_0 = 2$

Для доведення (2.48) виконаємо наступні перетворення:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-mx} \sum_{l=0}^{m+1} \frac{x^l (m-l+2)^l}{l!} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-mx} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(mx)^l (1 - \frac{l}{m})^l}{l!}.$$

Виберемо $0 < \beta < 1$ і розіб'ємо вираз під знаком границі таким чином:

$$\begin{aligned} e^{-mx} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(mx)^l (1 - \frac{l}{m})^l}{l!} &= \\ &= e^{-mx} \sum_{l=0}^{[\beta m]} \frac{(mx)^l (1 - \frac{l}{m})^l}{l!} + e^{-mx} \sum_{l=[\beta m]+1}^{m-1} \frac{(mx)^l (1 - \frac{l}{m})^l}{l!}, \end{aligned} \tag{C.1}$$

де $[a]$ позначає цілу частину числа a . Тут другий доданок оцінюється наступним чином:

$$\begin{aligned} e^{-m x} \sum_{l=[\beta m]+1}^{m-1} \frac{(m x)^l (1 - \frac{l}{m})^l}{l!} &< e^{-m x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m x)^l (1 - \frac{[\beta m]+1}{m})^l}{l!} < \\ &< e^{-m x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m x)^l (1 - \beta)^l}{l!} = e^{-m \beta x} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Цей доданок збігається до 0 для будь-якого значення β з інтервалу $0 < \beta < 1$. Перший доданок в (C.1) перетворимо таким чином:

$$e^{-m x} \sum_{l=0}^{[\beta m]} \frac{(m x)^l (1 - \frac{l}{m})^l}{l!} < e^{-m x} \sum_{l=0}^{[\beta m]} \frac{(m x)^l}{l!}.$$

Якщо вибрati β так, що $\beta < x$ (при $x \geq 1$ ця умова виконана автоматично), то $[\beta m] < mx$ і в останній сумі найбільший доданок — останній. Це дозволяє оцінити суму наступним чином (перший доданок відкинуто для спрощення запису):

$$e^{-m x} \sum_{l=0}^{[\beta m]} \frac{(m x)^l}{l!} < e^{-m x} [\beta m] \frac{(m x)^{[\beta m]}}{[\beta m]!}$$

Для оцінки останнього застосуємо формулу Стрілінга:

$$\begin{aligned} e^{-m x} [\beta m] \frac{(m x)^{[\beta m]}}{[\beta m]!} &= e^{-m x} [\beta m] \frac{(m x)^{[\beta m]}}{[\beta m]^{[\beta m]} e^{-[\beta m]} \sqrt{2 \pi [\beta m]} e^{\theta([\beta m])}} = \\ &= e^{-m x} \sqrt{\frac{[\beta m]}{2 \pi}} \frac{(m x)^{[\beta m]}}{[\beta m]^{[\beta m]} e^{-[\beta m]}} e^{-\theta([\beta m])} = e^{-m x} \sqrt{\frac{[\beta m]}{2 \pi}} \left(\frac{m x e}{[\beta m]} \right)^{[\beta m]} \times \\ &\times e^{-\theta([\beta m])} = \sqrt{\frac{[\beta m]}{2 \pi}} \left(\left(\frac{m x e}{[\beta m]} \right)^{\frac{[\beta m]}{m}} e^{-x} \right)^m e^{-\theta([\beta m])}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що для будь-якого m $0 \leq \frac{[\beta m]}{m} \leq \beta$. Отже, якщо вибрati β так, що

$$\left(\frac{x e}{\beta} \right)^\beta e^{-x} \leq a < 1, \quad (\text{C.2})$$

то нерівність

$$\left(\frac{m x e}{[\beta m]} \right)^{\frac{[\beta m]}{m}} e^{-x} \leq a$$

буде справдіжуватись для всіх $m \geq 1/\beta$. Таким чином, якщо вибрати $0 < \beta < 1$ так, що $\beta < x$ і задовольняє умову (С.2), то перший доданок в (С.1) також прямує до нуля, коли $m \rightarrow \infty$, оскільки в формулі Стрілінга $|\theta(n)| < 1/(12n)$, що і треба було довести.

C.2 Знаходження допоміжних функцій для нейрона з $N_0 = 3$

Рівняння, яке слід розв'язати для визначення $f(x)$, —

$$f(x) - q e^{q(x-1)} \int_0^{1-x} f(y) dy = q e^{-q} - q e^{q(x-2)} q. \quad (\text{C.3})$$

Спочатку слід пересвідчитись, що воно має не більше одного розв'язку. Для цього необхідно і достатньо, щоб рівняння

$$f - M(q)f = 0$$

мало лише нульовий розв'язок. Останнє випливає з оцінки норми оператора $M(q)$, поданої на с. 129. Дійсно, якщо маємо

$$f = M(q)f,$$

то

$$\|f\| = \|M(q)f\| \leq e^{-q} \|f\|.$$

Останнє можливе тільки для $f(x) = 0$. Зауважимо, що розв'язок рівняння (С.3) існує. Дійсно, він дається збіжним по нормі рядом (2.66). Наша мета — одержати вираз для функції $f(x)$ через елементарні функції, який не містить сумації безмежного ряду.

Розділимо рівняння (С.3) на $qe^{q(x-1)}$ і продиференціюємо по x :

$$e^{q(1-x)} \frac{d}{dx} f(x) - q e^{q(1-x)} f(x) + q f(1-x) = -q^2 e^{-qx}, \quad f(1) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Останнє рівняння в сукупності з граничною умовою еквівалентне (С.3). Дійсно, проінтегруємо (С.4) по інтервалу $[x; 1]$ і використаємо граничну умову:

$$q \int_x^1 f(1-z) dz - e^{q-qx} f(x) = q e^{-q} - q e^{-qx}.$$

Останнє переходить в (С.3) після заміни змінної інтегрування $z \rightarrow 1-y$.

Підставимо в (С.3) $1-x$ замість x і знайдемо з одержаного рівняння вираз для $f(1-x)$:

$$f(1-x) = q e^{-qx} \int_0^x f(y) dy - q e^{-qx-q} + q e^{-q}.$$

Підставимо цей вираз в (С.4):

$$\begin{aligned} q^2 e^{-qx} \int_0^x f(y) dy + e^{q(1-x)} \frac{d}{dx} f(x) - q e^{q(1-x)} f(x) - q^2 e^{-qx-q} + \\ + q^2 e^{-q} = -q^2 e^{-qx}. \end{aligned}$$

Домножимо останнє рівняння на e^{qx} і продиференціюємо по x :

$$e^q \frac{d^2}{dx^2} f(x) - q e^q \frac{d}{dx} f(x) + q^2 f(x) + q^3 e^{qx-q} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Розв'язок останнього рівняння має задовольняти також і рівняння (С.4) разом із граничною умовою. Це дає можливість визначити дві довільних константи в загальному розв'язку (С.5).

Загальний розв'язок рівняння (С.5) має наступний вигляд:

$$f(x) = e^{qx/2} \left(K_1 \sin \left(\frac{q e^{-q/2} \sqrt{4 - e^q} x}{2} \right) + K_2 \cos \left(\frac{q e^{-q/2} \sqrt{4 - e^q} x}{2} \right) \right) - q e^{q x - q}$$

при $e^q \leq 4$,

$$f(x) = e^{qx/2} \left(K_1 \sinh \left(\frac{q e^{-q/2} \sqrt{e^q - 4} x}{2} \right) + K_2 \cosh \left(\frac{q e^{-q/2} \sqrt{e^q - 4} x}{2} \right) \right) - q e^{q x - q}$$

при $e^q \geq 4$.

Визначення констант дає наступні вирази для $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= q e^{\frac{qx}{2} + \frac{3q}{2}} \left(\frac{2 \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q} x}{2} \right)}{2 e^{2q} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{4 - e^q} \sin \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q} (x-1)}{2} \right)}{2 e^{2q} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\frac{q}{2}} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q} (x-1)}{2} \right)}{2 e^{2q} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{4 - e^q}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} \right) - q e^{q x - q}, \text{ при } e^q \leq 4, \text{ i} \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) = q e^{\frac{q}{2}x + \frac{3q}{2}} & \left(\frac{2 \cosh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4} x}{2} \right)}{2 e^{2q} \cosh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{e^q - 4} \sinh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4} (x-1)}{2} \right)}{2 e^{2q} \cosh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} + \\
& \left. + \frac{e^{\frac{q}{2}} \cosh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4} (x-1)}{2} \right)}{2 e^{2q} \cosh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} \sqrt{e^q - 4}}{2} \right) + e^{\frac{5q}{2}}} \right) - q e^{q(x-q)}, \text{ при } e^q \geq 4. \quad (\text{C.7})
\end{aligned}$$

Одержані вирази використаємо для обчислення $S(q)$ за формулою (2.67):

$$S(q) = 1 - e^{-q} + \int_0^1 dx f(x).$$

Останнє дає для $e^q \leq 4$

$$\begin{aligned}
S(q) = & \frac{e^{4q} s(q) \sin \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} s(q)}{2} \right) + \left(e^{\frac{9q}{2}} - 2 e^{\frac{7q}{2}} \right) \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} s(q)}{2} \right) + e^{4q}}{2 e^{\frac{7q}{2}} \cos \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} s(q)}{2} \right) + e^{4q}}, \quad (\text{C.8}) \\
\text{де } s(q) = & \sqrt{4 - e^q}.
\end{aligned}$$

Для $e^q \geq 4$ одержується вираз

$$\begin{aligned}
S(q) = & \frac{-e^{4q} s_1(q) \sinh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} s_1(q)}{2} \right) + \left(e^{\frac{9q}{2}} - 2 e^{\frac{7q}{2}} \right) \cosh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} s_1(q)}{2} \right) + e^{4q}}{2 e^{\frac{7q}{2}} \cosh \left(\frac{q e^{-\frac{q}{2}} s_1(q)}{2} \right) + e^{4q}}, \\
\text{де } s_1(q) = & \sqrt{e^q - 4}.
\end{aligned}$$

Бібліографія

- [1] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 400 с.
- [2] Карлин С. Основы теории случайных процессов. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
- [3] Гудименко Ф.С. Диференціальні рівняння. — Київ: Видавництво КДУ ім. Т.Г. Шевченко, 1958. — 208 с.
- [4] Калужнін Л.А., Вишеньський В.А., Шуб Ц.О. Лінійні простири. — Київ: Вища школа, 1971. — 344 с.
- [5] Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
- [6] Yong Y.K., Vig J.R. Resonator surface contamination — a cause of frequency fluctuations? // IEEE Trans. UFFC. — 1989. — № 36. — P.452–458.
- [7] Костюк П.Г., Крышталь О.А. Механизмы электрической возбудимости нервной клетки. — М.: Наука, 1981. — 204 с.
- [8] Відібіда О.К., Кукла О.Л., Павлюченко О.С., Ширшов Ю.М. Хімічний сенсор для аналізу складу газових сумішей / Деклараційний патент на винахід. — UA 63780A МПК G01D1/02, заявл. 24.06.2003, опубл. 15.01.2004. — Бюл. № 1.

- [9] Vidybida A.K. Adsorption-desorption noise can be used for improving selectivity//Sensors and Actuators A. — 2003. — Vol. 107. — P. 233–237.
- [10] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972. — 232 с.
- [11] Эдвардс Р. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.
- [12] Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. — 830 с.
- [13] Бриллюэн Л. Наука и теория информации. — М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. — 392 с.
- [14] Боровков А.А. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1972. — 288 с.
- [15] Відбіда О.К. Гальмування як контроллер зв'язування на рівні поодинокого нейрону//Доповіді НАН України. — 1996. — № 10. — С. 161–164.
- [16] Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания//Труды математического института им. В.А.Стеклова, XLIX. — М.: Наука, 1955. — 122 с.
- [17] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — 800 с.
- [18] Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1947. — 182 с.
- [19] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.
- [20] Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М.: ИЛ, 1947. — 168 с.
- [21] Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956. — 606 с.

- [22] Проценко В. С., Чаленко П. Й., Ставровський А. Б. Техніка програмування мовою Сі. — Київ: Либідь, 1993. — 224 с.

Додаткова література

Скороход А.В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — К.: Выща школа, 1980. — 344 с.

Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 528 с.

Risken H. The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications. — Springer, 1989. — 485 p.

Гончар М.С. Фондовий ринок і економічний ріст. — Київ: Обереги, 2001. — 826 с.

Показчик

- аналіт, 69
- багаточасові функції розподілу, 11
 - узгодженість, 12
 - балансне рівняння, 20, 78
 - для N рецепторів, 54
 - для лінійного графа переходів, 20, 78, 135, 139, 142
 - збереження позитивності, 26
 - інваріантний стан, 29
 - для хеморецептора, 50
 - для циклічного графа переходів, 84
 - зі стоком, 34
 - асимптотика, 37
 - збереження позитивності, 36
 - зворотне, 33, 39
 - для лінійного графа переходів, 33, 39
 - зі стоком, 35, 39, 45
 - збереження повної ймовірності, 33
 - інваріантний стан, 28
 - для лінійного графа, 29
 - розв'язок, 22, 51, 57, 78
 - збереження повної ймовірності, 26
 - збереження позитивності, 24, 26
 - обмеженість, 27
 - броунівський рух, 140
 - перехідні ймовірності, 140, 144
 - середнє переміщення, 141
- випадкові блукання
 - двосторонні, 139
 - з дрейфом, 142
 - односторонні, 137
 - чисельне моделювання, 164
- випадкові числа, 145
 - метод відбору, 146, 148, 150
 - метод відображення, 150, 151
- гамма-розподіл, 79, 94
- граф переходів, 8
 - зі стоком, 34
 - лінійний, 34, 42, 44, 78, 135
 - хеморецептора, 50
 - циклічний, 30, 84

- детальний баланс, 29
- нейрон
- зв'язуючий, 97
 - вихідна інтенсивність, 103, 108, 109, 111, 112, 131
 - розподіл міжімпульсних інтервалів, 100
 - сценарії переходів, 113–120
- хеморецепторний, 61
- селективність, 62, 64, 68
- нейросенсор, 61
- перехідні ймовірності, 17, 54, 57, 78, 85, 86, 89
- для броунівського руху, 140, 144
- твірна функція, 54–57
- пороговий детектор, 70
- пуассонівський лічильник
- інтегральний, 78
 - балансне рівняння, 78
 - інваріантний стан, 29
 - перехідні ймовірності, 78
 - розподіл міжімпульсних інтервалів, 80
- циклічний, 83
- балансне рівняння, 84
 - інформація, 86
 - перехідні ймовірності, 85
- циклічний+інтегральний, 88
- вихідна інтенсивність, 91
 - інформація, 96
 - немарковість, 90
 - розподіл міжімпульсних інтервалів, 94
- рівняння
- Фоккера-Планка, 140, 144
 - Чепмена-Колмогорова, 18
- розподіл імовірності, 7
- багаточасовий, 11, 12
 - узгодженість, 12
 - умовний, 15
- селективність
- хеморецептора, 62, 63
 - хеморецепторного нейрона, 62, 63, 65
 - оцінка, 68
- середній час
- досягнення порогу зверху, 60
 - досягнення порогу знизу, 59
 - життя системи зі стоком, 41, 44, 48
 - на двох кінцях, 48
- неперервного перебування над порогом, 65
- неперервного перебування під порогом, 65
- стохастичний процес, 11
- без післядії, 15
- марківський, 15, 78
- однорідний, 17
 - перехідні ймовірності, 17
- немарківський, 15, 16, 90, 94
- ординарний, 77
- пуассонівський, 78
- дисперсія, 81
 - перехідні ймовірності, 78

чисельне моделювання, 155,
156
чисельне моделювання сор-
туванням, 159
реалізація, 12, 108, 134, 138,
142, 144, 152, 155, 158,
163
стационарний, 16, 78

флуктуації, 53, 54, 69, 72, 74
формула Стрілінга, 169

хімічний сенсор, 69

швидкості переходів, 19, 25, 33,
44, 51, 54, 78, 84, 138,
142
шум адсорбції-десорбції, 54, 69

Стохастические модели/А.К. Видыбіда – Київ, 2006.
– 204 с.

Излагаются элементы теории стохастических процессов с точки зрения их практического применения к задачам нанотехнологии, химической кинетики, сенсорных систем, нейрофизики. Материал базируется на прямых и обратных балансных уравнениях (Master Equations) для систем с конечным множеством детерминистических состояний. Изложение сосредоточено вокруг формул для вычисления средних времён пребывания над и под заданным порогом. Применение формул проиллюстрировано на примерах оценки селективности хеморецепторного нейрона и химического наносенсора. Рассмотрены современные модели нейронов, исследованы их стохастические свойства. Методом граничного перехода выведено уравнение Фоккера-Планка для броуновского движения. В приложениях приведены программы на языке С для численного моделирования стохастических процессов и результаты их тестирования. Книга будет полезной для специалистов и студентов старших курсов и аспирантов естественных, экономических и технических специальностей. Табл. 5 Илл. 38. Библиогр.: 26 назв.

Stochastic models/A.K. Vidybida – Kyiv, 2006. – 204 p.

Elements of stochastic processes are presented having in mind their practical applications to problems in nanotechnology, chemical kinetics, sensory systems, neurophysics. The material is based on direct and backward master equations for systems with finite number of deterministic states. Presentation is focused around formulas for calculating mean times for a system to stay continuously above or below a given threshold. The formulas are applied for estimation of selectivity of chemosensor neuron, and for chemical nanosensor. Stochastic properties of modern models of neuron are considered. By means of limiting procedure, the Fokker-Planck equation for Brownian motion is derived. In the appendices, programs written in C for numerical modelling of stochastic processes are given, as well as results of their testing. The book will be useful for professionals and under/postgraduate students in natural science, economical and technical specialty. Tabl. 5 Ill. 38. Bibliogr.: 26 refs.

© A.K. Vidybida, 2006

Наукове видання

**Відibіда Олександр Костянтинович
СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ**

Редактор *B.Ф.Погребенчик*
Комп'ютерна верстка *O.K.Відibіда*
Київ 03143, вул. Метрологічна 14-Б
Інститут теоретичної фізики ім. М.М.Боголюбова
<http://www.bitp.kiev.ua>
vidybida@bitp.kiev.ua, т.4243037
Макет виготовлено у видавничій системі L^AT_EX
під операційною системою Linux

Зам. 6 Формат 60x84/16 . Обл.-вид. арк. 12
Підписано до друку 7.02.2006 . Тираж 400
Поліграфічна дільниця Інституту теоретичної фізики